

# Introduction au Compressed sensing, Complétion de matrices et systèmes de recommandations

Guillaume Lécué<sup>1</sup>

## Résumé

On introduit dans ce chapitre le problème de complétion de matrices. Une hypothèse de parcimonie naturelle dans ce problème est l'hypothèse de *faible rang*. La procédure naturellement associée à cette hypothèse est basée sur la minimisation de la fonction rang sur un espace de solutions  $\{B \in \mathbb{R}^{u \times v} : \langle B, X_i \rangle = y_i, \forall i = 1, \dots, m\}$ . Cette procédure est en générale NP-hard. On va alors utiliser l'approche de la *relaxation convexe* dans ce cadre. La procédure obtenue est celle qui consiste à minimiser la norme nucléaire (i.e. la somme des valeurs singulières) sur l'espace des solutions. On montre que cette procédure peut se réécrire comme un problème de *semi-definite programming* et peut donc être implémentée efficacement (avec quelques restrictions sur la grandeur de la dimension).

On analyse ensuite la procédure de minimisation de la norme nucléaire par l'*approche RIP* puis par une approche plus générale basée sur l'étude de la taille de la sous-différentielle de la norme de régularisation et sur la minoration d'un processus quadratique.

## 1 Introduction

Soit  $X^* \in \mathbb{R}^{u \times v}$ . On suppose qu'on dispose de  $m$  mesures  $y_i = \langle X^*, X_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, m$  de  $X^*$ . On souhaite pouvoir reconstruire exactement  $X^*$  à partir des mesures  $(y_i)_{i=1}^m$  sachant que  $X^*$  est de rang  $r \ll u \wedge v$ .

Une procédure naturelle est celle consistant à rechercher la solution de rang minimal dans l'espace des solutions  $\{A \in \mathbb{R}^{u \times v} : \langle A, X_i \rangle = y_i, i = 1, \dots, m\}$  :

$$\min \left( \text{rang}(A) : \langle A, X_i \rangle = y_i, i = 1, \dots, m \right). \quad (1.1)$$

De même que la procédure de minimisation  $\ell_0$ , la procédure de minimisation du rang est en général NP-hard. Une approche similaire à celle utilisée pour le Basis Pursuit est alors de remplacer la fonction (non-convexe)  $A \rightarrow \text{rang}(A)$  par la "fonction convexe la plus proche". C'est la technique de la relaxation convexe qui est développée dans la Section 2.

**Notations.** Sur l'espace  $\mathbb{R}^{u \times v}$  des matrices de taille  $u \times v$ , on définit un produit scalaire par :

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}.$$

Pour toute matrice  $A \in \mathbb{R}^{u \times v}$ , on note  $\text{sp}(A)$  son **spectre**, c.à.d, le vecteur de  $\mathbb{R}^{u \wedge v}$  des valeurs singulières (qui sont les racines carrées des valeurs propres de  $A^\top A$ ) :  $\text{sp}(A) = (\sigma_j)_{j=1}^{u \wedge v}$  et  $\sigma_1(A) \geq \dots, \geq \sigma_{u \wedge v}(A) \geq 0$ . On définit ensuite les **normes de Schatten** par :

$$\|A\|_{S_p} = \|\text{sp}(A)\|_{\ell_p} = \left( \sum_{j=1}^{u \wedge v} \sigma_j(A)^p \right)^{1/p}$$

---

1. CNRS, CREST, ENSAE. Bureau E31, 3 avenue Pierre Larousse. 92 245 Malakof. Email : guillaume.lecue@ensae.fr.

pour tout  $A \in \mathbb{R}^{u \times v}$  et  $p \geq 1$ . Le rang d'une matrice peut aussi s'exprimer comme

$$\text{rang}(A) = \|\text{sp}(A)\|_{\ell_0}.$$

La norme  $S_1$  est aussi appelée **norme nucléaire** ou **norme trace**. La norme  $S_2$  est la **norme de Frobenius**, c'est la norme Hilbertienne associée à  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . La norme  $S_\infty$  est la **norme d'opérateur** de  $\ell_2^v$  dans  $\ell_2^u$  :

$$\|A\|_{S_\infty} = \sup_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2.$$

On rappelle les résultats de dualité :

$$\|A\|_{S_q} = \sup (\langle A, B \rangle : \|B\|_{S_p} \leq 1)$$

quand  $q^{-1} + p^{-1} = 1$ .

Pour tout entier  $p$ , on note

$$\mathcal{S}^p = \{A \in \mathbb{R}^{p \times p} : A^\top = A\}, \mathcal{S}_+^p = \{A \in \mathcal{S}^p : A \succeq 0\} \text{ et } \mathcal{S}_{++}^p = \{A \in \mathcal{S}^p : A \succ 0\}$$

qui sont respectivement, l'espace des **matrices symétriques**, le cône des **matrices semi-définies** (càd telles que  $x^\top Ax \geq 0$  pour tout  $x$ ) et le cône des **matrices semi-définies positives** (càd telles que  $x^\top Ax > 0$  pour tout  $x \neq 0$ ). On note aussi le groupe des **matrices orthonormales** par

$$\mathcal{O}(p) = \{A \in \mathbb{R}^{p \times p} : A^\top A = AA^\top = I_p\}$$

où  $I_p$  est la matrice identité de  $\mathbb{R}^p$ .

## 2 Minimisation de la norme nucléaire

### 2.1 Enveloppe convexe du rang

**Définition 2.1.** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $C$  un sous-ensemble convexe de  $E$ . Soit  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle **enveloppe convexe de  $f$  sur  $C$**  la plus grande fonction convexe plus petite que  $f$ . On la note  $\text{conv}(f)$ .

Autrement dit, on a pour tout  $x \in C$ ,

$$\text{conv}(f)(x) = \sup (g(x) : g \text{ est convexe et } g(y) \leq f(y), \forall y \in C).$$

Quand  $E$  est un espace de Hilbert, on peut montrer par des arguments géométriques sur l'épigraphe de  $f$  qu'on peut restreindre la définition de  $\text{conv}(f)$  à toutes les fonctions affines plus petites que  $f$  : on a pour tout  $x \in C$ ,

$$\text{conv}(f)(x) = \sup_{a \in H, b \in \mathbb{R}} (\langle a, x \rangle + b : \langle a, y \rangle + b \leq f(y), \forall y \in C).$$

**Définition 2.2.** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $C$  un sous-ensemble convexe de  $H$ . Soit  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ . On appelle **transformée de Fenchel de  $f$  sur  $C$**  la fonction définie en tout point  $x \in H$  par

$$f^*(x) = \sup_{y \in C} (\langle x, y \rangle - f(y)).$$

La transformée de Fenchel de  $f$  est une fonction convexe (même si  $f$  n'est pas convexe). Elle est définie sur l'espace entier  $H$ . On peut alors définir la transformée de Fenchel de  $f^*$  sur  $H$  par : pour tout  $y \in H$ ,

$$f^{**}(y) = \sup_{x \in H} (\langle x, y \rangle - f^*(x)).$$

La fonction  $f^{**}$  est appelée **bidual** de  $f$ . On notera que le supremum définissant  $f^{**}$  est pris sur tout  $H$  alors que celui définissant  $f^*$  est restreint à  $C$ .

**Théorème 2.3.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $C$  un sous-ensemble convexe de  $H$ . Soit  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ . On note  $\text{conv}(f)$  l'enveloppe convexe de  $f$  sur  $C$  et par  $f^{**}$  la fonction bidual de  $f$  sur  $C$ . On a pour tout  $x \in C$ ,  $f^{**}(x) = \text{conv}(f)(x)$ .*

*Démonstration.* On utilise la caractérisation de  $\text{conv}(f)$  en terme de fonctions affines : pour tout  $x \in C$ ,

$$\text{conv}(f)(x) = \sup_{a \in H, b \in \mathbb{R}} (\langle a, x \rangle + b : \langle a, y \rangle + b \leq f(y), \forall y \in C). \quad (2.1)$$

Etant donné  $a \in H$ , on voit que la contrainte de (2.1) est satisfaite pour tout  $b \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $y \in C$ ,

$$b \leq f(y) - \langle a, y \rangle.$$

Etant donné qu'on cherche à maximiser en  $a$  et  $b$ , on n'a pas d'autres choix que de prendre

$$b = \inf_{y \in C} (f(y) - \langle a, y \rangle) = -f^*(a).$$

Pour ce choix de  $b$  la contrainte est vérifiée et on a donc

$$\text{conv}(f)(x) = \sup_{a \in H} (\langle a, x \rangle - f^*(a)) = f^{**}(x). \quad \blacksquare$$

Il suffit donc de calculer le **bidual** de  $f$  pour connaître son enveloppe convexe. C'est la stratégie qu'on utilise pour déterminer l'enveloppe convexe du rang sur la boule unité de la norme d'opérateur.

**Théorème 2.4.** *L'enveloppe convexe de la fonction rang sur  $B_{S_\infty} = \{A \in \mathbb{R}^{u \times v} : \|A\|_{S_\infty} \leq 1\}$  est la norme nucléaire.*

*Démonstration.* On commence par rappeler l'inégalité de von Neuman : pour tout  $A, B \in \mathbb{R}^{u \times v}$ ,

$$|\langle A, B \rangle| \leq \sum_i \sigma_i(A) \sigma_i(B)$$

où  $\sigma_1(A) \geq \dots \geq \sigma_{u \wedge v}(A)$  est la suite décroissante des valeurs singulières de  $A$ . Le cas d'égalité  $\langle A, B \rangle = \sum_i \sigma_i(A) \sigma_i(B)$  a lieu uniquement si pour la SVD  $A = U_A D_A V_A^\top$  de  $A$  on a  $U_A^\top B V_A = D_B$  où  $D_A = \text{diag}(\text{sp}(A))$  et  $D_B = \text{diag}(\text{sp}(B))$ .

**Partie 1 :** On calcul la transformée de Fenchel de la fonction rang  $f(A) = \text{rang}(A)$  sur  $B_{S_\infty}$ . Pour tout  $A \in \mathbb{R}^{u \times v}$ , on a

$$f^*(A) = \sup_{B \in B_{S_\infty}} (\langle A, B \rangle - f(B)).$$

Par l'inégalité de von Neumann, on a  $\langle A, B \rangle \leq \sum_i \sigma_i(A) \sigma_i(B)$  et comme le rang et la norme  $S_\infty$  sont invariants par multiplication à gauche et à droite par les matrices orthogonales, on a

$$f^*(A) = \sup_{B \in B_{S_\infty}} \left( \sum_i \sigma_i(A) \sigma_i(B) - f(B) \right).$$

On note  $q = u \wedge v$  et on partitionne ensuite  $B_{S_\infty}$  en fonction du rang :

$$\begin{aligned} f^*(A) &= \sup_{B \in B_{S_\infty}} \left( \sum_i \sigma_i(A) \sigma_i(B) - f(B) \right) = \max_{0 \leq r \leq q} \sup_{B \in B_{S_\infty} : f(B) = r} \left( \sum_{i=1}^r \sigma_i(A) \sigma_i(B) - r \right) \\ &= \max_{0 \leq r \leq q} \sup_{B \in B_{S_\infty} : f(B) = r} \left( \sum_{i=1}^r \sigma_i(A) - r \right) = \sum_{i=1}^q (\sigma_i(A) - 1)_+ \end{aligned}$$

**Partie 2 :** On calcul maintenant le bidual de  $f$ . Pour tout  $B \in \mathbb{R}^{u \times v}$ , on a

$$f^{**}(B) = \sup_{A \in \mathbb{R}^{u \times v}} \left( \langle A, B \rangle - f^*(A) \right).$$

Il s'ensuit de l'inégalité de von Neumann et du cas d'égalité que

$$f^{**}(B) = \sup_A \left( \sum \sigma_i(A) \sigma_i(B) - f^*(A) \right).$$

Pour tout  $\|A\|_{S_\infty} \leq 1$ , on a

$$f^*(A) = \sum_i (\sigma_i(A) - 1)_+ = 0.$$

On a donc

$$\sup_{\|A\|_{S_\infty} \leq 1} \left( \sum \sigma_i(A) \sigma_i(B) - f^*(A) \right) = \sup_{\|A\|_{S_\infty} \leq 1} \sum \sigma_i(A) \sigma_i(B) = \sum \sigma_i(B) = \|B\|_{S_1}.$$

Par ailleurs, si  $\|A\|_{S_\infty} \geq 1$  et si  $\|B\|_{S_\infty} \leq 1$  on a

$$\begin{aligned} \sum \sigma_i(A) \sigma_i(B) - f^*(A) &= \sum_i \sigma_i(A) \sigma_i(B) - \sum_i (\sigma_i(A) - 1)_+ \\ &= \sum_i \sigma_i(B) + \sum_i (\sigma_i(A) - 1) \sigma_i(B) - \sum_i (\sigma_i(A) - 1)_+ \\ &= \|B\|_{S_1} + \underbrace{\sum_{i: \sigma_i(A) \leq 1} (\sigma_i(A) - 1) \sigma_i(B)}_{\leq 0} + \underbrace{\sum_{i: \sigma_i(A) > 1} (\sigma_i(A) - 1) (\sigma_i(B) - 1)}_{\leq 0} \leq \|B\|_{S_1} \end{aligned}$$

et on conclut car  $\sigma_i(B) \leq 1$  pour tout  $i$ . ■

*Conclusion : L'enveloppe convexe de la fonction rang sur  $B_{S_\infty}$  est la norme nucléaire. Il est alors naturel de "remplacer" la fonction objectif rang dans le problème NP-hard de minimisation du rang par la norme nucléaire suivant le principe de relaxation convexe.*

## 2.2 Procédure de minimisation de la norme nucléaire et problème SDP

La relaxation convexe du problème (1.1) est donc la procédure de minimisation de la norme nucléaire sur l'espace des solutions :

$$\hat{A} \in \operatorname{argmin}_{A \in \mathbb{R}^{u \times v}} \left( \|A\|_{S_1} : \mathcal{A}(A) = y \right). \quad (\text{NM})$$

où on note  $\mathcal{A}(A) = (\langle A, X_i \rangle)_{i=1}^m$  et  $y = (y_i)_{i=1}^m$ .

Tout comme pour le Basis Pursuit on vérifie que la procédure de minimisation de la norme nucléaire sur l'espace des solutions peut être implémentée de manière efficace en réécrivant (NM) comme un problème de *semidefinite programming* (SDP) (on rappelle la définition d'un problème SDP sous forme standard dans la Définition 2.7).

Pour cela on considère le problème suivant

$$\begin{pmatrix} \hat{X} \\ \hat{Y} \\ \hat{Z} \end{pmatrix} \in \underset{X \in \mathbb{R}^{u \times v}, Y \in \mathcal{S}^u, Z \in \mathcal{S}^v}{\operatorname{argmin}} \operatorname{Tr}(Y) + \operatorname{Tr}(Z) \text{ tel que } \begin{cases} \mathcal{A}(X) = y \\ \begin{bmatrix} Y & X \\ X^\top & Z \end{bmatrix} \succeq 0 \end{cases} \quad (\text{SDP})$$

**Théorème 2.5.** *Les deux problèmes (NM) et (SDP) sont équivalents :*

1. *si  $\hat{A}$  est solution de (NM) alors  $(\hat{A}, \hat{Y}, \hat{Z})^\top$  est solution de (SDP) pour certains  $\hat{Y}$  et  $\hat{Z}$ ,*
2. *si  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})^\top$  est solution de (SDP) alors  $\hat{X}$  est solution de (NM).*

Pour démontrer Théorème 2.5, on démontre d'abord le lemme suivant.

**Lemme 2.6.** *Soit  $A \in \mathbb{R}^{u \times v}$  et  $t \geq 0$ . Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :*

- a)  $\|A\|_{S_1} \leq t$
- b) *il existe  $Y \in \mathcal{S}^u, Z \in \mathcal{S}^v$  tels que*

$$\operatorname{Tr}(Y) + \operatorname{Tr}(Z) \leq 2t \text{ et } \begin{bmatrix} Y & A \\ A^\top & Z \end{bmatrix} \succeq 0$$

*Démonstration.* On suppose que b) est vraie. On considère la SVD de  $A$  :  $A = UDV^\top$  où  $U \in \mathcal{O}(u)$ ,  $D = \operatorname{diag}(\operatorname{sp}(A)) \in \mathbb{R}^{u \times v}$  et  $V \in \mathcal{O}(v)$ . On voit que pour  $I_{u,v} = \operatorname{diag}((1)_{i=1}^q) \in \mathbb{R}^{u \times v}$  où  $q = u \wedge v$ , la matrice

$$\begin{pmatrix} I_u & -UI_{u,v}V^\top \\ -VI_{u,v}^\top U^\top & I_v \end{pmatrix}$$

est semi-définie car pour tout  $x \in \mathbb{R}^u, y \in \mathbb{R}^v$ , on a

$$\begin{pmatrix} x^\top & y^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_u & -UI_{u,v}V^\top \\ -VI_{u,v}^\top U^\top & I_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 - 2\langle U^\top x, I_{u,v}V^\top y \rangle \geq 0.$$

Comme le produit de deux matrices semi-définies est aussi semi-défini, on a

$$\operatorname{Tr} \left[ \begin{pmatrix} I_u & -UI_{u,v}V^\top \\ -VI_{u,v}^\top U^\top & I_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y & A \\ A^\top & Z \end{pmatrix} \right] \geq 0$$

càd

$$\operatorname{Tr}(Y - UI_{u,v}V^\top A^\top) + \operatorname{Tr}(-VI_{u,v}U^\top A + Z) \geq 0$$

et donc  $2t \geq \operatorname{Tr}(Y) + \operatorname{Tr}(Z) \geq 2\operatorname{Tr}(D) = 2\|A\|_{S_1}$ .

On suppose que a) est vrai. On considère la SVD de  $A$  sous la forme :  $A = U_r D_r V_r^\top$  où  $r = \operatorname{rang}(A)$ ,  $U_r \in \mathbb{R}^{u \times r}$  est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs singuliers gauches de  $A$ ,  $V_r \in \mathbb{R}^{v \times r}$  où les colonnes sont les vecteurs singuliers droits de  $A$  et  $D_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$  est la matrice diagonale des valeurs singulières non-nulles de  $A$ .

On pose

$$Y = U_r D_r U_r^\top + \gamma I_u \in \mathcal{S}^u \text{ et } Z = V_r D_r V_r^\top + \gamma I_v \in \mathcal{S}^v$$

pour un certain  $\gamma > 0$  à déterminer. On a

$$\operatorname{Tr}(Y) + \operatorname{Tr}(Z) = 2\operatorname{Tr}(D_r) + \gamma(u + v) = 2\|A\|_{S_1} + \gamma(u + v) = 2t$$

pour  $\gamma = 2(t - \|A\|_{S_1})/(u + v)$ . De plus,

$$\begin{bmatrix} Y & A \\ A^\top & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_r D_r U_r^\top & U_r D_r V_r^\top \\ V_r D_r U_r^\top & V_r D_r V_r^\top \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} I_u & 0 \\ 0 & I_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_r \\ V_r \end{bmatrix} D_r \begin{bmatrix} U_r^\top & V_r^\top \end{bmatrix} + \gamma I_{u+v} \succeq 0$$

■

**Preuve du Théorème 2.5.** On démontre d'abord le premier point. Si  $\hat{A}$  est solution de (NM) alors d'après Lemme 2.6, il existe  $\hat{Y}, \hat{Z}$  tel que

$$\text{Tr}(\hat{Y}) + \text{Tr}(\hat{Z}) = 2 \|\hat{A}\|_{S_1} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \hat{Y} & \hat{A} \\ \hat{A}^\top & \hat{Z} \end{bmatrix} \succeq 0.$$

Comme  $\mathcal{A}(\hat{A}) = y$ , on a bien que  $(\hat{A}, \hat{Y}, \hat{Z})$  est dans l'ensemble des contrainte de (SDP). De plus  $\text{Tr}(\hat{Y}) + \text{Tr}(\hat{Z}) = 2 \|\hat{A}\|_{S_1}$  donc si  $(X, Y, Z)$  est dans l'ensemble des contraintes de (SDP), on aura  $\mathcal{A}(X) = y$  et donc, par optimalité de  $\hat{A}$ ,  $\|\hat{A}\|_{S_1} \leq \|X\|_{S_1}$ , mais aussi  $\text{Tr}(Y) + \text{Tr}(Z) = 2 \|X\|_{S_1}$  et donc nécessairement

$$\text{Tr}(\hat{Y}) + \text{Tr}(\hat{Z}) = 2 \|\hat{A}\|_{S_1} \leq 2 \|X\|_{S_1} = \text{Tr}(Y) + \text{Tr}(Z).$$

Donc  $(\hat{A}, \hat{Y}, \hat{Z})$  est bien solution de (SDP).

Pour démontrer le point 2), on suppose que  $(\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$  est solution de (SDP). On a

$$\text{Tr}(\hat{Y}) + \text{Tr}(\hat{Z}) \leq 2t \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \hat{Y} & \hat{X} \\ \hat{X}^\top & \hat{Z} \end{bmatrix} \succeq 0$$

pour  $t = (\text{Tr}(\hat{Y}) + \text{Tr}(\hat{Z}))/2$ . Alors, d'après Lemme 2.6, on a

$$\|\hat{X}\|_{S_1} \leq \frac{\text{Tr}(\hat{Y}) + \text{Tr}(\hat{Z})}{2}.$$

Soit  $A$  dans l'espace des contraintes de (NM). Par le Lemme 2.6, il existe  $Y, Z$  tel que  $\text{Tr}(Y) + \text{Tr}(Z) = 2 \|A\|_{S_1}$  et  $(A, Y, Z)$  est dans l'espace des contrainte de (SDP). En particulier,

$$\|\hat{X}\|_{S_1} \leq \frac{\text{Tr}(\hat{Y}) + \text{Tr}(\hat{Z})}{2} \leq \frac{\text{Tr}(Y) + \text{Tr}(Z)}{2} = \|A\|_{S_1}$$

et comme  $\mathcal{A}(\hat{X}) = y$ ,  $\hat{X}$  est dans l'ensemble des contraintes de (NM). On en déduit donc que  $\hat{X}$  est solution de (NM). ■

On peut donc réécrire le problème de minimisation de la norme nucléaire comme un problème SDP dont on rappelle la forme générale maintenant.

**Définition 2.7.** Un problème d'optimisation est un *semidefinite programming (SDP)* s'il peut se réécrire sous la forme

$$\min_{X \in \mathcal{S}^p} \left( \langle C, X \rangle : \tilde{\mathcal{A}}(X) = b, X \succeq 0 \right) \quad (2.2)$$

où  $C \in \mathcal{S}^p$ ,  $\tilde{\mathcal{A}} : \mathcal{S}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire et  $b \in \mathbb{R}^m$ .

On peut réécrire le problème (SDP) sous la forme d'un *semidefinite programming* :

$$\min \left( \left\langle C, \begin{bmatrix} Y & X \\ X^\top & Z \end{bmatrix} \right\rangle : \tilde{\mathcal{A}} \left( \begin{bmatrix} Y & X \\ X^\top & Z \end{bmatrix} \right) = y, \begin{bmatrix} Y & X \\ X^\top & Z \end{bmatrix} \succeq 0 \right)$$

où le minimum est pris sur toutes les matrices symétriques  $\begin{bmatrix} Y & X \\ X^\top & Z \end{bmatrix}$ ,

$$C = I_{u+v}, \tilde{\mathcal{A}} \left( \begin{bmatrix} Y & X \\ X^\top & Z \end{bmatrix} \right) = \mathcal{A}(X) \text{ et } b = y.$$

Il existe ensuite des algorithmes similaires à ceux vus en *Linear programming* pour résoudre de manière approchée les problèmes SDP. Par exemple, sous CVXOPT, on résout (2.2) en transformant  $C$  et  $X$  en vecteur de taille  $p^2$  par concaténation (par colonnes par exemple) par la fonction  $\text{vec} : \mathbb{R}^{p \times p} \rightarrow \mathbb{R}^{p^2}$  et en réécrivant  $\tilde{\mathcal{A}}$  comme un opérateur linéaire  $A^\top : \mathbb{R}^{p^2}$  dans  $\mathbb{R}^m$ . On réécrit alors (2.2) sous la forme

$$\min_X \left( \langle \text{vec}(C), \text{vec}(X) \rangle : A^\top(\text{vec}(X)) = b, X \succeq 0 \right)$$

qui se résout avec la commande

```
> sol = cvxopt.solvers.conelp(-b, A, vec(C))
```

où  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times p^2}$  et  $\text{vec}(C) \in \mathbb{R}^{p^2}$  sont des objets du type `matrix` de CVXOPT. On récupère ensuite  $\text{vec}(X)$  par la commande

```
> print(sol['z']).
```

*Conclusion* : On peut réécrire le problème de minimisation de la norme nucléaire comme un problème SDP. Il existe des algorithmes de type barrière primal-dual pour résoudre les SDP.

### 3 Etude de la reconstruction exacte par (NM)

L'objectif de cette section est de déterminer pour quels "vecteurs" de mesures  $X_i \in \mathbb{R}^{u \times v}$ ,  $i = 1, \dots, m$  et en quel nombre  $m$  on peut reconstruire exactement toutes les matrices  $A$  de rang  $r$  à partir des observations  $y_i = \langle A, X_i \rangle$ ,  $i = 1, \dots, m$  en utilisant la procédure (NM). En notant

$$\Sigma_r = \{A \in \mathbb{R}^{u \times v} : \text{rang}(A) = r\}$$

on est alors intéressé par la propriété suivante :

**Définition 3.1.** Soit  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{u \times v} \rightarrow \mathbb{R}^m$  un opérateur linéaire de mesure  $\mathcal{A}(A) = (\langle A, X_i \rangle)_{i=1}^m$ . On dit que  $\mathcal{A}$  satisfait la **propriété de reconstruction exacte d'ordre  $r$** , notée  $RE(r)$  quand pour toute matrice  $A \in \Sigma_r$ ,

$$\underset{X}{\text{argmin}} (\|X\|_{S_1} : \mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(A)) = \{A\}.$$

Autrement dit, un opérateur de mesures  $\mathcal{A}(\cdot)$  vérifie  $RE(r)$  quand pour tout  $A \in \Sigma_r$ , il y a une unique matrice de plus faible norme nucléaire dans l'espace des solutions  $\{X \in \mathbb{R}^{u \times v} : \mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(A)\}$  et cette matrice est  $A$ .

Il est possible de reprendre la même suite d'arguments que ceux développés pour l'étude du Basis Pursuit à partir de version matricielle de RIP et NSP. On présente brièvement ces arguments (sans preuve, car elles sont identiques au cas vectoriel) dans la section suivante. On mettra plutôt en avant dans la dernière section, une méthode de preuve alternative mettant en avant le rôle de la non-différentiation de la fonction objective pour induire de la parcimonie.

### 3.1 Argumentation basée sur l'approche RIP

On présente ici, dans le cas matriciel, les outils introduits précédemment pour la reconstruction exacte de vecteurs parcimonieux à partir d'un petit nombre de mesures. On commence par la *Null Space property* qui donne une condition nécessaire et suffisante de reconstruction exacte.

**Définition 3.2.** Soit  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{u \times v} \rightarrow \mathbb{R}^m$  un opérateur linéaire. On dit que  $\mathcal{A}$  satisfait la **rank-Null Space Property (rank-NSP)** de degrés  $r$  quand pour toutes matrices  $A$  dans le noyau de  $\mathcal{A}$ , on a

$$\sum_{i=1}^r \sigma_i(A) < \sum_{i \geq r+1} \sigma_i(A)$$

où  $\sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \dots$  est la suite décroissante des valeurs singulières de  $A$ .

**Proposition 3.3.** Soit  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{u \times v} \rightarrow \mathbb{R}^m$  un opérateur linéaire. Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1.  $\mathcal{A}$  satisfait  $RE(r)$
2.  $\mathcal{A}$  satisfait  $\text{rank-NSP}(r)$ .

Il est cependant difficile de prouver  $\text{rank-NSP}$  directement. On peut alors considérer une version matricielle de RIP.

**Définition 3.4.** Soit  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{u \times v} \rightarrow \mathbb{R}^m$  un opérateur linéaire. On dit que  $\mathcal{A}$  satisfait **rank Restricted Isometry Property (rank-RIP)** de degrés  $r$  et de constante d'isométrie  $\delta_r$  quand pour toutes matrices  $A$  de rang  $r$ , on a

$$(1 - \delta_r) \|A\|_{S_2}^2 \leq \|\mathcal{A}(A)\|_{\ell_2^m}^2 \leq (1 + \delta_r) \|A\|_{S_2}^2.$$

**Proposition 3.5.** Il existe des constantes absolues  $c_0 > 0, 0 < c_1 < 1$  pour lesquelles ce qui suit est vrai. Soit  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{u \times v} \rightarrow \mathbb{R}^m$  un opérateur linéaire. Si  $\mathcal{A}(\cdot)$  vérifie  $\text{rank-RIP}(c_0 r)$  pour  $\delta_r < c_1$  alors  $\text{rank-NSP}(r)$  est vérifiée.

De plus, on peut montrer que dans le cas de mesures Gaussiennes, la condition  $\text{RIP}(r)$  est vérifiée avec grande probabilité dès que  $m \gtrsim r(u + v)$ . On définit d'abord ce qu'on entend par mesures gaussiennes dans le cas matriciel. On dit que  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{u \times v} \rightarrow \mathbb{R}^m$  où  $\mathcal{A}(A) = (\langle X_i, A \rangle)_{i=1}^m$  est un **opérateur linéaire de mesures gaussiennes** quand pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $X_i = (g_{pq} : 1 \leq q \leq u, 1 \leq p \leq v)$  est une matrice Gaussienne, càd les  $g_{pq}$  sont i.i.d.  $\mathcal{N}(0, 1)$ . De plus les  $X_i$ 's sont indépendants entre eux.

**Théorème 3.6.** Soit  $\mathcal{A} : \mathbb{R}^{u \times v} \rightarrow \mathbb{R}^m$  un opérateur de mesures Gaussiennes et soit  $0 < \delta < 1$ . Il existe des constantes  $c_0, c_1$  et  $c_2$  dépendant uniquement de  $\delta$  telles que, avec probabilité au moins  $1 - c_0 \exp(-c_1 m)$ ,  $\mathcal{A}(\cdot)$  vérifie  $\text{RIP}(r)$  dès que  $m \geq c_2 r(u + v)$ .

On peut aussi montrer par un argument de complexité que  $c_3 r(uv + v)$  mesures sont nécessaires.

### 3.2 Preuve générale mettant l'accent sur la non-différentiation de la fonction objective

Dans cette section, on considère un espace de Hilbert muni de son produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $E \subset H$  un sous-espace vectoriel de  $H$  et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$ . Soient  $X_1, \dots, X_m$  des vecteurs de mesures éléments de  $H$ . On observe  $y_i = \langle X_i, x^* \rangle, i = 1, \dots, m$  pour un certain  $x^* \in E$ . On souhaite pouvoir reconstruire  $x^*$  exactement à partir des mesures  $(y_i)_{i=1}^m$ .



Pour cela, on considère la procédure

$$\hat{x} \in \operatorname{argmin} (\|x\| : \mathcal{A}(x) = y) \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{A}(x) = (\langle X_i, x \rangle)_{i=1}^m$  est l'opérateur de mesures et  $y = (y_i)_{i=1}^m$  est le vecteur des mesures. On souhaite savoir quels sont les  $x^*$  qui peuvent être exactement reconstruit par (3.1), pour quels vecteurs de mesures  $X_1, \dots, X_m$  et en quel nombre  $m$  ?

Pour répondre à ces questions, on va introduire une condition sur les  $X_1, \dots, X_m$  et une condition sur la sous-différentielle de la fonction objective définie par la norme  $\|\cdot\|$ . On introduit quelques notations :

1. la norme duale associée à  $\|\cdot\|$  est définie pour tout  $x \in E$  par

$$\|x\|_* = \sup (\langle x, y \rangle : \|y\| \leq 1),$$

2. les boules et sphères unité associées à  $\|\cdot\|$ ,  $\|\cdot\|_*$  et  $\|\cdot\|_2$  (où  $\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle$ ) sont notées, respectivement par

$$\begin{aligned} B &= \{x \in E : \|x\| \leq 1\}, S = \{x \in E : \|x\| = 1\} \\ B_* &= \{x \in E : \|x\|_* \leq 1\}, S_* = \{x \in E : \|x\|_* = 1\} \\ B_2 &= \{x \in H : \|x\|_2 \leq 1\}, S_2 = \{x \in H : \|x\|_2 = 1\}. \end{aligned}$$

3. la sous-différentielle de  $\|\cdot\|$  en  $x$  est

$$\partial \|\cdot\| (x) = \{g \in E : \|x + h\| \geq \|x\| + \langle g, h \rangle, \forall h \in E\} = \begin{cases} \{g \in S_* : \langle g, x \rangle = \|x\|\} & \text{si } x \neq 0 \\ B_* & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(cf. Exemple 2.5 du chapitre précédent sur les méthodes proximales).

On introduit d'abord une condition sur l'opérateur de mesures.

**Définition 3.7.** Soit  $X_1, \dots, X_m$  des vecteurs de  $H$  et  $\mathcal{A} : H \rightarrow \mathbb{R}^m$  l'opérateur de mesures tel que  $\mathcal{A}(A) = (\langle A, X_i \rangle)_{i=1}^m$ . Pour tout  $r^* > 0$ , on introduit le cône

$$\mathcal{C}_{r^*} = \{x \in E : \|x\|_2 \geq r^* \|x\|\}. \quad (3.2)$$

On dit que  $\mathcal{A}(\cdot)$  vérifie la **condition de valeur singulière restreinte de rayon**  $r^*$ , notée  $\text{VSR}(r^*)$ , quand pour tout  $x \in \mathcal{C}_{r^*}$ , on a

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \langle x, X_i \rangle^2 \geq \frac{\|x\|_2^2}{2}. \quad (3.3)$$

Quand  $H = \mathbb{R}^N$  et  $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ , on montre que  $\text{VSR}(r^*)$  est impliquée par  $\text{RIP}(s)$  pour  $r^* \sim 1/\sqrt{s}$ . Par exemple quand les mesures sont sous-gaussiennes, on peut montrer qu'avec probabilité au moins  $1 - 2 \exp(-c_0 m)$ ,  $\text{VSR}(r^*)$  est vérifiée pour

$$r^* = \inf (r > 0 : \ell^*(B \cap rB_2) \leq c_1 r \sqrt{m}) \quad (3.4)$$

où  $\ell^*(B \cap rB_2)$  est la **fenêtre Gaussienne moyenne** de  $B \cap rB_2$ . On rappelle la définition des fenêtres Gaussiennes.

**Définition 3.8.** Soit  $T$  un sous-ensemble de l'espace de Hilbert  $H$ . On note par  $(G_t)_{t \in T}$ , le processus Gaussien canonique associé à  $T$ . La fenêtre Gaussienne de  $T$  est

$$\ell^*(T) = \mathbb{E} \sup_{t \in T} G_t.$$

En dimension finie, le processus Gaussien  $(G_t)_{t \in T}$  est donné par  $G_t = \langle G, t \rangle$  où  $G$  est une variable aléatoire Gaussienne Standard. Par exemple, dans  $\mathbb{R}^N$ , on a pour tout  $t = (t_j)_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$ ,  $G_t = \sum_{j=1}^N g_j t_j$  où  $g_1, \dots, g_N$  sont des  $\mathcal{N}(0, 1)$  i.i.d.. On a alors pour tout  $T \subset \mathbb{R}^N$ ,

$$\ell^*(T) = \mathbb{E} \sup_{t \in T} \sum_{j=1}^N g_j t_j.$$

On introduit maintenant un paramètre relatif à la taille de la sous-différentielle de  $\|\cdot\|$  en tout point.

**Définition 3.9.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $E$  un sev de  $H$ . On note par  $S$  la sphère unité de  $\|\cdot\|$  et par  $\partial \|\cdot\|(x^*)$  sa sous-différentielle en  $x^*$ . Pour tout  $x^* \in E$ , on définit le coefficient de sparsité de  $\|\cdot\|$  en  $x^*$  pour le rayon  $r^*$  par

$$\Delta_{r^*}(x^*) = \inf_{h \in S \cap r^* B_2} \sup_{z \in \partial \|\cdot\|(x^*)} \langle z, h \rangle. \quad (3.5)$$

Comme  $S \cap r^* B_2 \subset S$  et  $\partial \|\cdot\|(x^*) \subset S_*$  quand  $x^* \neq 0$ , on a forcément pour tout  $h \in S \cap r^* B_2$  et  $z \in \partial \|\cdot\|(x^*)$ ,  $\langle z, h \rangle \leq 1$ . La condition qui va nous intéresser dans la suite est de demander que  $\Delta_{r^*}(x^*) > 0$ .

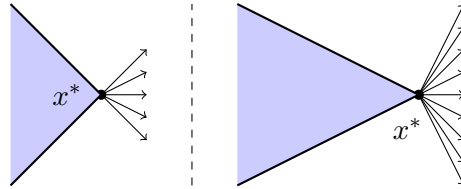


FIGURE 1 – La richesse de la sous-différentielle de  $\|\cdot\|$  en les points d'intérêt (càd les points sparse en un certain sens) – ou dans un voisinage de ces points dans le cas bruité – joue un rôle central en statistiques en grandes dimensions.

**Théorème 3.10.** On suppose qu'il existe  $r^* > 0$  tel que l'opérateur de mesures  $\mathcal{A}(\cdot)$  satisfait la condition  $VSR(r^*)$ . Alors pour tout  $x^*$  tel que  $\Delta_{r^*}(x^*) > 0$ , on aura

$$\operatorname{argmin}_{x: \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x^*)} \|x\| = \{x^*\}.$$

*Démonstration.* Soit  $x^* \in E$  tel que  $\Delta_{r^*}(x^*) > 0$ . Soit  $x \in E$  tel que  $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x^*)$  et  $x \neq x^*$ . Montrons que  $\|x\| > \|x^*\|$ .

Si  $x - x^* \in \mathcal{C}_{r^*}$  alors d'après  $VSR(r^*)$ , on a

$$\|\mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x^*)\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \langle X_i, x^* - x \rangle^2 \geq \frac{m \|x^* - x\|_2^2}{2} > 0$$

car  $x \neq x^*$ . Alors  $\mathcal{A}(x) \neq \mathcal{A}(x^*)$  ce qui est une contradiction et donc  $x - x^* \notin \mathcal{C}_{r^*}$ . On a alors en posant  $h = x - x^*$  que  $\|h\|_2 < r^* \|h\|$  et donc  $h/\|h\| \in S \cap r^* B_2$ . Alors

$$\|x\| - \|x^*\| = \|x^* + h\| - \|x^*\| \geq \langle g, h \rangle = \left\langle g, \frac{h}{\|h\|} \right\rangle \|x - x^*\|$$

pour tout  $g \in \partial \|\cdot\| (x^*)$ . On passant au supremum sur  $g \in \partial \|\cdot\| (x^*)$  et à l'infimum sur  $h/\|h\| \in S \cap r^* \|h\|_2$ , on obtient

$$\|x\| - \|x^*\| \geq \Delta_{r^*}(x^*) \|x - x^*\| > 0$$

car  $x \neq x^*$  et  $\Delta_{r^*}(x^*) > 0$ . On a donc bien  $\|x\| > \|x^*\|$  et donc  $x^*$  est l'unique solution du problème de minimisation

$$\min_{x: \mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(x^*)} \|x\|.$$

■

On voit donc que la taille de la sous-différentielle de  $\|\cdot\|$  en les points sparse joue un rôle central pour leur reconstruction. Pour illustrer ce propos, on peut calculer :

1. le sous-gradient de la norme  $\ell_1$  en les vecteurs  $s$ -sparse
2. le sous-gradient de la norme nucléaire en les matrices de rang  $r$ .

On observera alors que plus le vecteur (resp. la matrice) est sparse (resp. de faible rang) plus la sous-différentielle en ce point est riche et donc plus  $\Delta_{r^*}$  a des chances d'être strictement positif.

On commence par le calcul de la sous-différentielle de la norme  $\ell_1$ . En introduction, on peut visualiser cette différentielle en dimension  $N = 2$ , puis on étudiera le cas général.

La sous-différentielle de la fonction valeur absolue est donnée par définition pour tout  $t \in \mathbb{R}$  par

$$\partial |\cdot|(t) = \{g \in \mathbb{R} : |t + h| \geq |t| + gh, \forall h \in \mathbb{R}\}.$$

Soit  $t > 0$ . Si  $g \in \mathbb{R}$  est un sous-gradient de la valeur absolue en  $t$  alors pour tout  $h \in \mathbb{R}$ , on aura  $|t + h| \geq |t| + gh$  en particulier pour tout  $-t < h < 0$ ,  $t + h \geq t + gh$  donc  $h \geq gh$  et comme  $h < 0$ , on a  $g \geq 1$ . De même pour tout  $h > 0$ , on aura  $t + h \geq t + gh$  donc  $h \geq gh$  et comme  $h > 0$ , on a  $g \leq 1$ . Alors, nécessairement,  $g = 1$ . De même quand  $t < 0$ , l'unique sous-gradient de  $|\cdot|$  en  $t$  est  $-1$ . Pour  $t = 0$ ,  $g$  est un sous-gradient quand  $|h| \geq gh$  pour tout  $h \in \mathbb{R}$ , c'est le cas pour tout  $g \in [-1, 1]$ . On conclut que

$$\partial |\cdot|(t) = \begin{cases} \{1\} & \text{si } t > 0 \\ \{-1\} & \text{si } t < 0 \\ [-1, 1] & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

On retrouve bien que la sous-différentielle d'une fonction en un point où elle est différentiable est réduite à un point qui est le sous-gradient de cette fonction en ce point.

Pour le calcul de la sous-différentielle de la norme  $\|\cdot\|_1$  en dimension 2, on considère  $x = (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ . On suppose  $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ . Si  $g = (g_1, g_2)^\top \in \mathbb{R}^2$  est un sous-gradient de  $\|\cdot\|_1$  en  $x$  alors pour tout  $h = (h_1, h_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ , on doit avoir

$$|x_1 + h_1| + |x_2 + h_2| \geq |x_1| + |x_2| + g_1 h_1 + g_2 h_2.$$

En particulier, pour  $h_1 = 0$  on voit que  $g_2$  est un sous-gradient de  $|\cdot|$  en  $x_2$ . De même quand  $h_2 = 0$ , on trouve que  $g_1$  est un sous-gradient de  $|\cdot|$  en  $x_1$ . On en déduit que  $g = \text{sign}(x)$ . Si

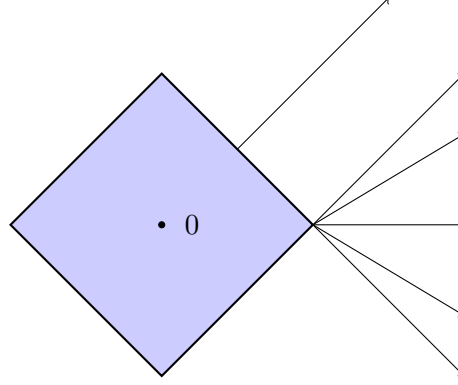


FIGURE 2 – Sous-différentielle de la norme  $\|\cdot\|_1$  en dimension  $N = 2$  en  $(1/2, 1/2)^\top$  et  $(1, 0)^\top$ .

une des coordonnées de  $x$  est nulle alors on voit que pour cette coordonnée le sous-gradient peut prendre toutes les valeurs dans  $[-1, 1]$ . On a donc par exemple

$$\partial \|\cdot\|_1 \left( \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \partial \|\cdot\|_1 \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ g \end{pmatrix} : |g| \leq 1 \right\}$$

**Lemme 3.11.** Soit  $x^* \in \mathbb{R}^N$  et  $1 \leq s \leq N$ . On suppose que  $x^*$  est  $s$ -sparse et on note  $I = \text{supp}(x^*)$ . On a, pour  $x^* \neq 0$ ,

$$\partial \|\cdot\|_1(x^*) = \{z \in \mathbb{R}^N : \text{sign}(z_i) = x_i^*, \forall i \in I \text{ et } |z_i| \leq 1, \forall i \notin I\}.$$

Si  $x^* = 0$ ,  $\partial \|\cdot\|_1(x^*) = B_\infty^N$ .

*Démonstration.* On utilise la caractérisation de la sous-différentielle pour  $x^* \neq 0$  :

$$\partial \|\cdot\|_1(x^*) = \{g \in S_\infty^{N-1} : \langle g, x^* \rangle = \|x^*\|_1\}.$$

On voit facilement que  $g$  est normant pour  $x^*$  si et seulement si  $\text{sign}(g_i) = x_i^*$  pour tout  $i \in I$  vu que

$$\langle g, x^* \rangle = \sum_{i \in I} g_i x_i^* = \sum_{i \in I} |x_i^*| = \|x\|_1$$

seulement si cette condition est satisfaite. Les coordonnées de  $g$  sur  $I^c$  sont elles choisies arbitrairement en assurant que  $\|g\|_\infty \leq 1$ . ■

En d'autres termes,  $\partial \|\cdot\|_1(x^*)$  est isomorphe à une sphère  $S_\infty^{N-s-1}$  en dimension  $\mathbb{R}^{N-s}$ . En particulier, plus  $x^*$  est sparse plus  $\partial \|\cdot\|_1(x^*)$  est riche. Les cas extrêmes étant donnés par :

$$\partial \|\cdot\|_1(0) = B_\infty^N, \text{ ou } \partial \|\cdot\|_1((1, 0, \dots, 0)) = \{1\} \times S_\infty^{N-2} \text{ et } \partial \|\cdot\|_1((1)_{i=1}^N) = \{(1)_{i=1}^N\}.$$

Dans le cas 1-sparse  $x^* = (1, 0, \dots, 0)$ , on retrouve presque toute la sphère duale  $S_\infty^{N-1}$  (seule la première coordonnée est choisie égale à 1) et dans le deuxième cas d'un vecteur *diagonal* (ou *well-spread*),  $\|\cdot\|_1$  est différentiable en  $(1)_{i=1}^N$  et donc sa sous-différentielle est réduite à un point, qui est le gradient de la norme  $\|\cdot\|_1$  en ce point.

On peut obtenir un résultat similaire pour la sous-différentielle de la norme nucléaire en une matrice de faible rang. Les notions de support et de signe peuvent être adaptées au cas matriciel.

**Théorème 3.12.** Soit  $A \in \mathbb{R}^{u \times v}$  où  $u \geq v$ . On considère une SVD de  $A : A = UDV^\top$  où  $D = \text{diag}(\sigma_A) \in \mathbb{R}^{u \times v}$  où  $\sigma_A = (\sigma_1, \dots, \sigma_{u \wedge v})$  est le spectre de  $A$  tel que  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_{u \wedge v}(A)$ . On suppose que  $A$  est de rang  $r$ . On considère la décomposition par blocks

$$U = \begin{bmatrix} U^{(1)} & U^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}(u), D = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) & 0_{r, v-r} \\ 0_{u-r, r} & 0_{u-r, v-r} \end{bmatrix} \text{ et } V = \begin{bmatrix} V^{(1)} & V^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}(v)$$

où  $U^{(1)} \in \mathbb{R}^{u \times r}, V^{(1)} \in \mathbb{R}^{v \times r}$ . La sous-différentielle de  $\|\cdot\|_{S_1}$  en  $A$  est

$$\partial \|\cdot\|_{S_1}(A) = \{U^{(1)}V^{(1)\top} + U^{(2)}WV^{(2)\top} : W \in \mathbb{R}^{u-r, v-r}, \|W\|_{S_\infty} \leq 1\}$$

Pour faire l'analogie avec la sous-différentielle de la norme  $\ell_1$ , on peut dire que le terme  $U^{(1)}V^{(1)\top}$  joue le rôle du "signe" de  $A$  alors que le terme  $U^{(2)}WV^{(2)\top}$  est le terme (induisant la richesse de la sous-différentielle) qui correspond aux matrices ayant un "support" différent de celui de  $A$  : on a pour tout  $W \in \mathbb{R}^{u-r, v-r}, \langle A, U^{(2)}WV^{(2)\top} \rangle = 0$ . On peut voir l'analogie en réécrivant la matrice  $A$  dans la base  $(u_i v_j^\top)_{i,j}$  associée à une SVD de  $A$  :

$$A = UDV^\top = \sum_i \sigma_i u_i v_i^\top$$

où les  $u_i$  et  $v_i$  sont les colonnes de  $U$  et  $V$  respectivement. Ainsi, en regardant  $(u_i v_i^\top)_i$  comme une famille orthogonale de matrice de rang 1 dans laquelle  $A$  se représente naturellement (on remarque que  $\langle A, u_i v_j^\top \rangle = 0$  quand  $i \neq j$  et  $\langle A, u_i v_i^\top \rangle = \sigma_i$ ), on peut écrire tout sousgradient de  $\|\cdot\|_{S_1}$  en  $A$  comme

$$\sum_{i=1}^r u_i v_i^\top + U^{(2)}WV^{(2)\top}$$

pour  $W \in \mathbb{R}^{u-r, v-r}$  tel que  $\|W\|_{S_\infty} \leq 1$  où " $U^{(2)}WV^{(2)\top}$ " est vu comme un terme dont le support est différent de  $A$ .

Avant de démontrer Théorème 3.12, on introduit la notion suivante : on dit qu'une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^{u \times v}$  est **orthogonalement invariante** quand pour tout  $A \in \mathbb{R}^{u \times v}, U \in \mathcal{O}(u)$  et  $V \in \mathcal{O}(v)$ , on a  $\|UAV\| = \|A\|$ . Dans ce cas, on peut montrer qu'il existe une norme inconditionnelle  $\phi(\cdot)$  sur  $\mathbb{R}^{u \wedge v}$  telle que  $\|A\| = \phi(\sigma_A)$  où  $\sigma_A \in \mathbb{R}^{u \wedge v}$  est le spectre de  $A$ . On rappelle qu'une norme est **inconditionnelle** quand

$$\phi(\epsilon_1 x_1, \dots, \epsilon_{u \wedge v} x_{u \wedge v}) = \phi(x_1, \dots, x_{u \wedge v})$$

pour tout signes  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{u \wedge v} \in \{\pm 1\}$ .

Pour démontrer Théorème 3.12, on va utiliser le résultat suivant sur la différentiation directionnelle d'une norme orthogonalement invariante :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|A + \epsilon R\| - \|A\|}{\epsilon} = \max_{d \in \partial \phi(\sigma_A)} \sum_{i=1}^{u \wedge v} d_i u_i v_i^\top \quad (3.6)$$

où  $A = UDV^\top, U = [u_1 | \dots | u_u], V = [v_1 | \dots | v_v]$  et  $D = \text{diag}(\sigma_A)$ . On rappelle qu'on a toujours

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\|A + \epsilon R\| - \|A\|}{\epsilon} = \max_{G \in \partial \|\cdot\|(A)} \langle R, G \rangle. \quad (3.7)$$

On démontre maintenant le lemme suivant.

**Lemme 3.13.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^{u \times v}$  orthogonalement invariante. On note  $\phi(\cdot)$  une norme inconditionnelle sur  $\mathbb{R}^{u \wedge v}$  telle que pour tout  $A \in \mathbb{R}^{u \times v}$ ,  $\|A\| = \phi(\sigma_A)$  où  $\sigma_A$  est le spectre de  $A$ . Soit  $A \in \mathbb{R}^{u \times v}$ , on a

$$\partial \|\cdot\| (A) = \text{conv}\{U\Sigma V^\top : A = UDV^\top, \Sigma = \text{diag}(\sigma), \sigma \in \partial\phi(\sigma_A)\}$$

où toutes les SVD de  $A$  sont à considérer dans la construction de l'ensemble de droite.

*Démonstration.* On note  $S(A) = \{U\Sigma V^\top : A = UDV^\top, \Sigma = \text{diag}(\sigma), \sigma \in \partial\phi(\sigma_A)\}$ . Soit  $G \in \text{conv}(S(A))$ . Montrons que  $G$  est un sous-gradient de  $\|\cdot\|$  en  $A$ . On rappelle que si  $A \neq 0$  alors

$$\partial \|\cdot\| (A) = \{G \in S_* : \langle G, A \rangle = \|A\|\}$$

où  $S_*$  est la sphère unité de la norme duale de  $\|\cdot\|$ . Il suffit donc de montrer que  $\langle G, A \rangle = \|A\|$  et que pour tout  $R$  tel que  $\|R\| \leq 1$ , on a  $\langle G, R \rangle \leq 1$ .

On écrit  $G = \sum_i \lambda_i U_i \Sigma_i V_i^\top$  où  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_i \lambda_i = 1$ ,  $\Sigma_i = \text{diag}(\sigma_i)$  où  $\sigma_i \in \partial\phi(\sigma_A)$  et  $A = U_i D V_i^\top$  est une SVD de  $A$ . On a

$$\langle G, A \rangle = \sum_i \lambda_i \langle U_i \Sigma_i V_i^\top, U_i D V_i^\top \rangle = \sum_i \lambda_i \langle \sigma_i, \sigma_A \rangle = \sum_i \lambda_i \phi(\sigma_A) = \phi(\sigma_A) = \|A\|$$

car  $\langle \sigma_i, \sigma_A \rangle = \phi(\sigma_A)$  vue que  $\sigma_i \in \partial\phi(\sigma_A)$ .

Pour le second point, on prend  $R \in \mathbb{R}^{u \times v}$  tel que  $\|R\| \leq 1$ . On considère  $\sigma_R$  le spectre de  $R$ . On a par l'inégalité de trace de von Neumann,

$$\langle G, R \rangle = \sum_i \lambda_i \langle U_i \Sigma_i V_i^\top, R \rangle \leq \sum_i \lambda_i \langle \sigma_i, \sigma_R \rangle \leq 1$$

car  $\sigma_i \in S_*$  et  $\sigma_R \in B$ , la boule unité de  $\|\cdot\|$ , donc  $\langle \sigma_i, \sigma_R \rangle \leq 1$ . On en déduit donc que  $G \in \partial \|\cdot\| (A)$ .

Réciproquement, on suppose qu'il existe  $G \in \partial \|\cdot\| (A)$  et  $G \notin \text{conv}(S(A))$ . Par un argument de séparation des ensemble de convexe, il existe  $R$  tel que  $\langle R, H \rangle < \langle R, G \rangle$  pour tout  $H \in S(A)$ . On a donc

$$\max_{H \in S(A)} \langle R, H \rangle < \max_{G \in \partial \|\cdot\| (A)} \langle R, G \rangle$$

alors

$$\max_{\sigma \in \partial\phi(\sigma_A)} \sum_i \sigma_i u_i^\top R v_i < \max_{G \in \partial \|\cdot\| (A)} \langle R, G \rangle.$$

Ceci contredit les égalités (3.6) et (3.7) ■

**Preuve du Théorème 3.12** On applique le Lemme 3.13 dans le cas où  $\phi(\sigma) = \|\sigma\|_1$ . Soit  $A$  de rang  $r$  et on considère une SVD de  $A = UDV^\top$  avec la décomposition par blocks

$$U = \begin{bmatrix} U^{(1)} & U^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}(u), D = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r) & 0_{r, v-r} \\ 0_{u-r, r} & 0_{u-r, v-r} \end{bmatrix} \text{ et } V = \begin{bmatrix} V^{(1)} & V^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathcal{O}(v)$$

où  $U^{(1)} \in \mathbb{R}^{u \times r}$ ,  $V^{(1)} \in \mathbb{R}^{v \times r}$ .

Soit  $G \in \partial \|\cdot\|_{S_1} (A)$ . D'après le Lemme 3.13, il existe  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_i \lambda_i = 1$  et  $A = U_i D V_i^\top$  des SVD de  $A$  tels que

$$G = \sum_i \lambda_i U_i \Sigma_i V_i^\top$$

où  $\Sigma_i = \text{diag}(\sigma_i)$  et  $\sigma_i \in \partial \|\cdot\|_1(\sigma_A)$ . Comme

$$\partial \|\cdot\|_1(\sigma_A) = \{g \in \mathbb{R}^{u \wedge v} : g_i = 1, i = 1, \dots, r \text{ et } |g_i| \leq 1, i \geq r + 1\},$$

si  $(U_i)_j$  et  $(V_i)_j$  sont les colonnes de  $U_i$  et  $V_i$  alors

$$G = \sum_i \lambda_i \left( \sum_j \sigma_{ij} (U_i)_j (V_i)_j^\top \right) = U^{(1)} V^{(1)\top} + \sum_i \lambda_i U_i^{(2)} W_i V_i^{(2)\top}$$

où les  $W_i$  sont des matrices diagonales de taille  $(u - r, v - r)$  dont les éléments diagonaux sont dans  $[-1, 1]$ . De plus, pour tout  $i$ , on peut trouver des matrices orthogonales  $Y_i \in \mathcal{O}(u - r)$  et  $Z_i \in \mathcal{O}(v - r)$  telles que  $U_i^{(2)} = U^{(2)} Y_i$  et  $V_i^{(2)} = V^{(2)} Z_i$ . On a donc

$$G = U^{(1)} V^{(1)\top} + \sum_i \lambda_i U^{(2)} Y_i W_i Z_i^\top V^{(2)\top} = U^{(1)} V^{(1)\top} + U^{(2)} W V^{(2)\top}$$

où  $W = \sum_i \lambda_i Y_i W_i Z_i^\top$ . De plus, la plus grande valeur singulière de  $W$  est telle que

$$\sigma_1(W) = \sigma_1 \left( \sum_i \lambda_i Y_i W_i Z_i^\top \right) \leq \sum_i \lambda_i \sigma_1(Y_i W_i Z_i^\top) = \sum_i \lambda_i \sigma_1(W_i) \leq 1.$$

■

Une autre façon de caractériser la sous-différentielle  $\partial \|\cdot\|_{S_1}(A)$  pour faire mieux ressortir la notion de "support" associée à une matrice est de l'écrire sous la forme suivante. Pour  $A \in \mathbb{R}^{u \times v}$ , on peut voir que  $A$  est de rang  $r$  si et seulement si il existe deux sous-espaces vectoriels  $I \subset \mathbb{R}^u$  et  $J \subset \mathbb{R}^v$  de dimension  $r$  tels que  $A = P_I A P_J$  où  $P_I$  est la projection sur  $I$  et  $P_J$  est la projection sur  $J$ . Dans ce cas,  $\partial \|\cdot\|_{S_1}(A)$  est l'ensemble de tout les  $G \in \mathbb{R}^{u \times v}$  tels que pour tout  $B \in \mathbb{R}^{u \times v}$ ,

1.  $\langle G, A \rangle = \|A\|_{S_1}$  - c-à-d  $G$  est normant pour  $A$
2.  $\langle G, P_{I^\perp} B P_{J^\perp} \rangle = \|P_{I^\perp} B P_{J^\perp}\|_{S_1}$  - c-à-d  $G$  est normant pour toute matrice de "support" disjoint de  $A$
3.  $\langle G, P_I B P_{J^\perp} \rangle = 0$  et  $\langle G, P_{I^\perp} B P_J \rangle = 0$  - c-à-d dire le "support" de  $G$  est restreint à " $(I, J) \cup (I^\perp, J^\perp)$ ".

On peut aussi caractériser tout sous-gradient de  $\partial \|\cdot\|_{S_1}(A)$  en l'écrivant dans la base  $(u_i v_j^\top)_{i,j}$  de la SVD de  $A = U D V^\top$  où les  $u_i$  et  $v_j$  sont les colonnes de  $U$  et  $V$ . En effet,  $G \in \partial \|\cdot\|_{S_1}(A)$  si et seulement si

$$G = \sum_{i=1}^r u_i v_i^\top + \sum_{i=1}^{u \wedge v} u_i W v_i^\top \quad (3.8)$$

où  $\|W\|_{S_\infty} \leq 1$ .

En prenant n'importe quelle expression des sous-gradients de  $\|\cdot\|_{S_1}$  en une matrice  $A^*$  de rang  $r$ , on voit que plus  $r$  est petit plus la sous-différentielle de  $S_1$  en  $A^*$  est riche. Ce qui est la propriété recherchée pour avoir  $\Delta_{r^*}(A^*) > 0$ .

*Conclusion* : La sous-différentielle d'une fonction est plus grande en ces points de non-différentiation. C'est le cas pour les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_{S_1}$  en les vecteurs sparse et les matrices de rang faible. C'est une propriété essentielle de ces normes pour les procédures Basis Pursuit et Nuclear Norm Minimization qui cherchent à reconstruire ce type d'objets. L'idée essentielle pour la construction de normes de régularisation induisant de la sparsité est de créer des singularités en les objets qui sont le plus sparses pour le notion de sparsité désirée.

## 4 Descente de gradient proximale pour la complétion de matrice

On s'intéresse ici à des méthodes proximales pour résoudre le problème de complétion de matrice. On considère ici les mesures obtenues dans ce problème, c'est-à-dire chaque observation est la donnée d'une entrée de la matrice à reconstruire. On parle de **masque** :

$$P_\Omega : \begin{cases} \mathbb{R}^{u \times v} & \rightarrow \mathbb{R}^{u \times v} \\ A & \rightarrow P_\Omega(A) \end{cases} \quad \text{où } (P_\Omega(A))_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } (i,j) \in \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On observe alors  $P_\Omega(A^*)$  pour un certain ensemble  $\Omega \subset \{1, \dots, u\} \times \{1, \dots, v\}$  et une certaine matrice  $A^*$  à reconstruire (c'est-à-dire à compléter). On suppose que  $A^*$  est de faible rang. C'est l'hypothèse de "sparcité".

On peut alors considérer deux autres procédures en plus de la *rank-minimization* :

1.

$$\tilde{A} \in \operatorname{argmin}_{\operatorname{rang}(A) \leq s} \|P_\Omega(A^*) - P_\Omega(A)\|_{S_2} \quad (4.1)$$

2.

$$\bar{A} \in \operatorname{argmin}_A \left( \frac{1}{2} \|P_\Omega(A^*) - P_\Omega(A)\|_{S_2}^2 + \lambda \|A\|_{S_1} \right). \quad (4.2)$$

Pour implémenter ces deux procédures, on va considérer des analogues du "hard-thresholding" et "soft-thresholding". On commence par calculer l'opérateur proximal de la norme nucléaire.

**Proposition 4.1.** *Soit  $\gamma > 0$ . L'opérateur proximal de  $\gamma \|\cdot\|_{S_1}$  est l'opérateur de seuillage spectral doux :*

$$\operatorname{prox}_{\gamma \|\cdot\|_{S_1}}(A) = S_\gamma(A) = UD_\gamma V^\top$$

pour une SVD de  $A = UDV^\top$  et  $D_\gamma = \operatorname{diag}((\sigma_1 - \gamma)_+, (\sigma_2 - \gamma)_+, \dots)$ .

*Démonstration.* Par définition,

$$\operatorname{prox}_{\gamma \|\cdot\|_{S_1}}(A) \in \operatorname{argmin}_B \left( \frac{1}{2} \|A - B\|_{S_2}^2 + \gamma \|B\|_{S_1} \right).$$

Par l'inégalité de von Neuman, on montre que le minimum est atteint en un point  $B$  de la forme  $B = UD_B V^\top$  où  $D_B = \operatorname{diag}(\sigma_B)$  et  $\sigma_B$  est le spectre de  $B$ . En effet, par von Neumann, on a

$$\|A - B\|_{S_2}^2 = \|A\|_{S_2}^2 + \|B\|_{S_2}^2 - 2\langle A, B \rangle \geq \|A\|_{S_2}^2 + \|B\|_{S_2}^2 - 2\langle \sigma_A, \sigma_B \rangle = \|\sigma_A - \sigma_B\|_2^2.$$

On a donc  $\operatorname{prox}_{\gamma \|\cdot\|_{S_1}}(A) = U \operatorname{diag}(\hat{d}) V^\top$  où

$$\hat{d} \in \operatorname{argmin}_{\sigma \in \mathbb{R}^{u \times v}} \left( \frac{1}{2} \|\sigma_A - \sigma\|_2^2 + \gamma \|\sigma\|_1 \right) = \operatorname{prox}_{\gamma \|\cdot\|_1}(\sigma_A).$$

On retrouve donc l'opérateur de seuillage doux appliqué en  $\sigma_A$  (qui a toutes ces coordonnées positives et ordonnées) alors

$$\operatorname{prox}_{\gamma \|\cdot\|_1}(\sigma_A) = ((\sigma_1 - \gamma)_+, (\sigma_2 - \gamma)_+, \dots)^\top.$$

On obtient bien le résultat. ■



Une fois calculer l'opérateur proximal, on peut construire une méthode de descente de gradient proximal pour implémenter (4.2) :

1.  $F(A) = (1/2) \|P_\Omega(A^*) - P_\Omega(A)\|_{S_2}^2$ ,  $\nabla F(A) = -P_\Omega^\top(P_\Omega(A^*) - P_\Omega(A)) = P_\Omega(A) - P_\Omega(A^*)$
2.  $A_{k+1} = \text{prox}_{\gamma_k \|\cdot\|_{S_1}} \left( A_k + \gamma_k (P_\Omega(A_k) - P_\Omega(A^*)) \right)$  où  $(\gamma_k)_k$  est une famille de step size. En particulier, quand  $\gamma_k = 1$ , on a

$$A_{k+1} = \text{prox}_{\|\cdot\|_{S_1}} \left( P_{\Omega^c}(A_k) + P_\Omega(A^*) \right)$$

De même pour implémenter (4.1), il suffit de remplacer l'opérateur de seuillage spectral doux par l'opérateur de seuillage spectrale dur car

$$\underset{B \in \Sigma_r}{\text{argmin}} \|A - B\|_{S_2} = \{UD_rV^\top\}$$

où  $A = UDV^\top$  et  $D_r = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$ . On obtient alors l'algorithme

$$A^{k+1} = S_\gamma^h(A^k + \gamma_k(P_\Omega(A^*) - P_\Omega(A^k)))$$

où  $S_\mu^h$  est l'opérateur de seuillage spectral dur :

$$S_\mu^h(A) = UD_\mu^hV^\top \text{ où } D_\mu^h = \text{diag}(\sigma_1 I(\sigma_1 \geq \mu), \sigma_2 I(\sigma_2 \geq \mu), \dots).$$