DM2

Exercice 1 (Variables exponentielles)**.** Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles distribuée selon une loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que $U = X/\lambda$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.
2. Donner la loi de la variable aléatoire $V = 1 + \lfloor X \rfloor$, où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.
3. Donner la loi de $W = \sqrt{X}$.
4. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \min(X, a)$, où $a > 0$. La variable Y a-t-elle une densité ? Pour cette dernière question on pourra montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue alors $t \mapsto \int_{-\infty}^{t} f(s)\mathrm{d}s$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Solution.

1. Calculons la fonction de répartition de U : si $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(U \leq t) = \mathbb{P}(X \leq \lambda t) = (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(\lambda t).$$

   On reconnait bien la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ, donc $U \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

2. On remarque que V est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et est donc une variable aléatoire discrète. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(V = k) = \mathbb{P}(E(X) = k-1) = \mathbb{P}(X \in [k-1, k[) = \int_{k-1}^{k} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-(k-1)} - \mathrm{e}^{-k} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{k-1}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right).$$

   On conclut que V suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

3. Pour déterminer la loi de $W = \sqrt{X}$, calculons sa fonction de répartition : si $t \geq 0$,

$$F_W(t) = \mathbb{P}(\sqrt{X} \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t^2) = 1 - \mathrm{e}^{-t^2},$$

   et si $t \leq 0$, $F_W(t) = 0$. On remarque que

$$F_W(t) = \int_{-\infty}^{t} 2u\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)\,\mathrm{d}u, \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

   Par conséquent, W a pour densité $f_W(u) = 2u\,\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(u)$, $u \in \mathbb{R}$. Il s'agit de la loi $\mathcal{W}(2,1)$ (loi de Weibull).

4. Calculons la fonction de répartition de $Y = \min(X, a)$ où $a \geq 0$. Si $t \leq 0$, alors $F_Y(t) = 0$.
Si $t \in [0, a[$, alors
$$\{Y \leq t\} = \{\min(X, a) \leq t\} = \{X \leq t\}$$
et donc
$$F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}\,.$$
Enfin, si $t \geq a$, alors
$$\{Y \leq t\} = \{\min(X, a) \leq t\} = \Omega$$
et donc $F_Y(t) = \mathbb{P}(Y \leq t) = 1$. En conclusion,
$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-t} & \text{si } 0 < t \leq a \\ 1 & \text{si } t \geq a \end{cases}.$$
On remarque en particulier que F_Y est discontinue en a. La variable Y ne peut donc pas avoir de densité, car la fonction de répartition des variables à densité est toujours continue en tout point d'après l'indication de l'exercice. Montrons cette indication.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ intégrable pour la mesure de Lebesgue et $t_0 \in \mathbb{R}$ et posons $F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(s)\mathrm{d}s$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|F(t) - F(t_0)| = |\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s|$. Il reste à montrer que $t \mapsto |\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s|$ tend vers 0 lorsque $t \to t_0$. Pour cela on utilise le critère sequentiel de la limite et le théorème de convergence dominé à la famille de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $g_n = \mathbb{1}_{[\min(t_0,t_n),\max(t_0,t_n)]}f$ pour une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers t_0. Comme $g_n \leq f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et f est supposée intégrale, et g_n converge presque partout vers la fonction nulle, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \mathrm{dLeb} = 0$. Cela implique que bien $t \mapsto |\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s|$ tend vers 0 lorsque $t \to t_0$ et conclue la preuve de l'indication.

Remarque : On rappelle que la valeur du saut en a détermine la masse accordée au singleton $\{a\}$. En effet, si t_n est une suite strictement croissante convergeant vers a, alors par la propriété d'intersection décroissante
$$F_Y(a) - F_Y(a^-) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y \in\,]t_n, a]) = \mathbb{P}(Y \in \{a\}).$$
Ici, on trouve donc $\mathbb{P}(Y = a) = \mathrm{e}^{-a}$.