DM 3

Exercice 1 (Maximum d'entropie)**.** Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X. Son entropie de Boltzmann-Shannon est définie par

$$H(X) := -\int f_X(x)\ln(f_X(x))\,dx$$

(avec la convention $0\ln(0) = 0$) lorsque la fonction $f_X\ln(f_X)$ est intégrable. On dit dans ce cas que X est d'entropie finie.

1. Montrer que si X est d'entropie finie alors pour tout $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $H(aX+b) = H(X)+\ln(|a|)$.
2. Calculer $H(X)$ dans chacun des cas suivants :
   (a) $X_1 \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$;
   (b) $X_2 \sim \mathcal{U}([a, b])$, $a < b$;
   (c) $X_3 \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$.
3. On considère une variable aléatoire X admettant une densité de la forme $f_X(x) = e^{-V(x)}\mathbb{1}_I(x)$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $V : I \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que $\int_I e^{-V(x)}\,\mathrm{d}x = 1$.
   (a) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans I et d'entropie finie. On suppose que Y admet une densité notée f_Y telle que $V(Y)$ est intégrable et vérifie $\mathbb{E}(V(Y)) = \mathbb{E}(V(X))$. Montrer que
   $$H(X) - H(Y) = -\int_{\{f_Y>0\}} \ln(f_X(x)/f_Y(x))\,f_Y(x)\,dx.$$
   En appliquant l'inégalité de Jensen, en déduire que $H(Y) \leq H(X)$.
   (b) En déduire que X_1 est la variable aléatoire d'entropie maximale parmi les variables Y d'entropie finie telles que $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$. Enoncer une propriété analogue pour les variables X_2 et X_3.