DM 4

Exercice 1. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité sur $\mathbb{R}^2$ tel que :

(i) X suit une loi $\Gamma(2,\lambda)$ (de densité $f_X(x) = \lambda^2 x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}$),

(ii) la loi conditionnelle de Y sachant X est la loi uniforme sur le segment $[0,X]$ (ou, en d'autres termes, la densité conditionnelle de Y sachant que $X=x$ est $f_{Y|X=x}(y) = \frac{1}{x}\, \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}$).

1. Déterminer la densité de (X,Y) ainsi que la loi de Y.
2. Déterminer la densité conditionnelle de X sachant Y.
3. Calculer les quantités suivantes :
   (a) $\mathbb{E}\left[XY\right]$ (on pourra utiliser le fait que $\mathbb{E}\left[X^2\right] = \frac{6}{\lambda^2}$),
   (b) $\mathbb{E}\left[Y \mid X\right]$,
   (c) $\mathbb{E}\left[X \mid Y\right]$,
4. En utilisant la méthode de la fonction muette, déterminer la loi de $X - Y$.

Solution. 1. Pour tout couple (x,y), on a $f_{(X,Y)}(x,y) = f_{Y|X=x}(y) \times f_X(x) = \lambda^2\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}$; d'où

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}\, \mathrm{d}x = \lambda\, \mathbb{1}_{y>0}\, \mathrm{e}^{-\lambda y},$$

et ainsi Y suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2. Soit $y>0$, on a

$$f_{X|Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \lambda^2\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\{0<y<x\}} \times \frac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{\lambda y} = \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda(x-y)}\, \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}\, .$$

3. (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy\lambda^2\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \lambda^2 x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \frac{x^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^3\lambda^2\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] = \frac{3}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

   (b) On calcule pour $x>0$

$$\int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X=x}(y)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} y\frac{1}{x}\, \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}\, \mathrm{d}y = \frac{1}{x}\int_0^x y\mathrm{d}y = \frac{x}{2},$$

   donc $\mathbb{E}[Y \mid X] = \frac{X}{2}$.

   Remarque : on a $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[XY \mid X]] = \mathbb{E}[X\mathbb{E}[Y \mid X]] = \mathbb{E}[\frac{X^2}{2}] = \frac{3}{\lambda^2}$.

   (c) Soit $y>0$ on calcule

$$\int_{\mathbb{R}} x\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda(x-y)}\, \mathbb{1}_{\{0<y<x\}}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\lambda y}\int_y^{+\infty} x\lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\lambda y}\left(\left[-x\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_y^{+\infty} + \int_y^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x}\right) = y+\frac{1}{\lambda},$$

   donc $\mathbb{E}[X \mid Y] = Y + \frac{1}{\lambda}$.

4. Soit h borélienne bornée :

$$\mathbb{E}[h(X-Y)] = \int_0^{+\infty}\int_0^x h(x-y)\lambda^2 e^{-\lambda x}\mathrm{d}y\mathrm{d}x,$$

en faisant le changement de variable $u = x-y$ à x constante, puis par Fubini on obtient

$$\mathbb{E}[h(X-Y)] = \int_0^{+\infty}\int_0^x h(u)\lambda^2 du e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} \lambda^2 h(u)e^{-\lambda x}\mathrm{d}x\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \lambda h(u)e^{-\lambda u}\mathrm{d}u$$

on en déduit que $X-Y$ suit la loi exponentielle de paramètre λ.