

DM 5

Exercice 1 (TOMBER DANS LE CERCLE). Soit $X = (X_1, X_2)^\top, Y = (Y_1, Y_2)^\top, Z = (Z_1, Z_2)^\top$ trois vecteurs aléatoires indépendants à valeurs dans \mathbb{R}^2 de loi gaussienne standard. L'objectif de l'exercice est de montrer que la probabilité que Z tombe dans le cercle de diamètre $\|Y - X\|$ qui passe par X et Y vaut $1/4$ (où $\|\cdot\|$ la norme euclidienne standard sur \mathbb{R}^2).

- a) Montrer que si ε_1 et ε_2 sont deux variables aléatoires réelles i.i.d. Gaussiennes standards alors $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$ suit une loi exponentielle $\text{Exp}(1/2)$ de paramètre $1/2$.
- b) On pose $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)^\top$ où

$$U_1 = Z_1 - \frac{(X_1 + Y_1)}{2}, U_2 = Z_2 - \frac{(X_2 + Y_2)}{2}, U_3 = \frac{X_1 - Y_1}{2} \text{ et } U_4 = \frac{X_2 - Y_2}{2}. \quad (1)$$

Montrer que U est un vecteur Gaussien. Déterminer sa moyenne et sa matrice de covariance.

En déduire que U_1, U_2, U_3 et U_4 sont indépendantes et déterminer leurs lois.

- c) Conclure à l'aide des deux questions précédentes.

Solution. a) Pour déterminer la loi de $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$, on utilise la méthode de la fonction muette. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On a

$$\mathbb{E}g(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x^2 + y^2) \exp\left(\frac{-1}{2}(x^2 + y^2)\right) \frac{dxdy}{2\pi} = 2 \int_{]0, +\infty[} g(x^2 + y^2) \exp\left(\frac{-1}{2}(x^2 + y^2)\right) \frac{dxdy}{\pi}.$$

On considère le changement de variable suivant : $(r, \theta) = (x^2 + y^2, \arctan(y/x))$. Pour cela, on va appliquer le théorème de changement de variables qui s'applique bien quand la fonction de changement de variables est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme. On considère

$$\varphi : \begin{cases} U & \longrightarrow & V \\ (x, y) & \longrightarrow & (x^2 + y^2, \arctan(y/x)). \end{cases}$$

où $U :=]0, +\infty[$ et $V :=]0, +\infty[\times]0, \pi/2[$ sont deux ouverts de \mathbb{R}^2 . On voit que φ est une bijection de U sur V en tant que composition de deux bijections : $(x, y) \longrightarrow (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan(y/x))$ qui est le changement en coordonnées polaires sur U qui est une bijection de U sur V et $(r, \theta) \longrightarrow (r^2, \theta)$ est une bijection de V sur V . Par ailleurs, φ est \mathcal{C}^1 en tant que composée de fonctions de classe \mathcal{C}^1 et sa matrice jacobienne est donnée pour tout $(x, y) \in U$ par

$$J(\varphi)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{-x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}$$

qui est inversible car de déterminant égale à -2 . La fonction φ est bien un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme (on utilise ici que φ est inversible, \mathcal{C}^1 et de différentielle inversible – car de matrice Jacobienne inversible – comme caractérisation d'un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme) et le théorème de changement de variable donne

$$\int_V h(r, \theta) drd\theta = \int_U h(\varphi(x, y)) |\det(J(\varphi)(x, y))| dxdy$$

(de manière informelle $(r, \theta) = (x^2 + y^2, \arctan(y/x))$ et $drd\theta = |\det(J(\varphi)(x, y))| dxdy = 2dxdy$). On obtient

$$\mathbb{E}g(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) = \int_V g(r) \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \frac{drd\theta}{\pi} = \int_{]0, +\infty[} g(r) \exp\left(\frac{-r^2}{2}\right) \frac{dr}{2}.$$

On en déduit que $\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$ suit une loi $\text{Exp}(1/2)$.

b) Tout d'abord U est un vecteur Gaussien. En effet, on peut écrire $U = AV$ où $V = (X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2)^\top$ est un vecteur Gaussien standard sur \mathbb{R}^6 et A une matrice de taille 4×6 donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que U est un vecteur en tant que transformation linéaire d'un vecteur Gaussien. Il suffit maintenant de déterminer sa moyenne et sa matrice de covariance pour caractériser entièrement sa loi. Pour sa moyenne, on a $\mathbb{E}U = A\mathbb{E}V = 0$. Pour sa matrice de covariance, on a

$$\text{Var}(U) = A \text{Var}(V) A^T = A A^T = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

La structure diagonale de $\text{Var}(U)$ implique que les composantes du vecteur U sont non corrélées et donc indépendantes. De plus, les éléments diagonaux de $\text{Var}(U)$ donne que U_1 et U_2 sont de loi normale $\mathcal{N}(0, 3/2)$ et U_3 et U_4 sont de loi normale $\mathcal{N}(0, 1/2)$.

c) On voit que Z tombe dans le cercle de diamètre $\|Y - X\|$ qui passe par X et Y si et seulement si

$$\left\| Z - \frac{(X + Y)}{2} \right\| \leq \frac{1}{2} \|X - Y\|. \quad (2)$$

En élevant au carré et en développant dans (2), on trouve que (2) est équivalent à la condition suivante :

$$\left(Z_1 - \frac{(X_1 + Y_1)}{2} \right)^2 + \left(Z_2 - \frac{(X_2 + Y_2)}{2} \right)^2 \leq \left(\frac{X_1 - Y_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{X_2 - Y_2}{2} \right)^2.$$

En utilisant les notations introduites dans (1), on voit que cette dernière condition s'écrit de manière équivalente comme

$$U_1^2 + U_2^2 \leq U_3^2 + U_4^2.$$

En utilisant la question **b)**, on peut écrire les $U_k, k = 1, 2, 3, 4$ comme

$$U_1 = \sqrt{3/2}\varepsilon_1, \quad U_2 = \sqrt{3/2}\varepsilon_2, \quad U_3 = (1/\sqrt{2})\varepsilon_3 \quad \text{et} \quad U_4 = (1/\sqrt{2})\varepsilon_4$$

où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)^\top$ est un vecteur gaussien standard de \mathbb{R}^4 . On pose $R_1^2 := \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2$ et $R_2^2 := \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2$. Ainsi en notant par p la probabilité que " Z tombe dans le cercle de diamètre $\|Y - X\|$ qui passe par X et Y ", on obtient finalement que cette probabilité vaut $p = \mathbb{P}[3R_1^2 \leq R_2^2]$.

Pour le calcul de $\mathbb{P}[3R_1^2 \leq R_2^2]$, on utilise la question **a)** et l'indépendance des $\varepsilon_k, k = 1, 2, 3, 4$. On a que R_1^2 et R_2^2 sont i.i.d. de loi $\text{Exp}(1/2)$. On obtient donc

$$p = \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{3r_1 \leq r_2} e^{-r_1/2} e^{-r_2/2} dr_1 dr_2 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-2r_1} dr_1 = \frac{1}{4}.$$