DM 6

Exercice 1 (La convergence en probabilité est métrisable). Si X et Y sont deux variables aléatoires, on note

$$d(X,Y) = \mathbb{E}\left[\frac{|X-Y|}{1+|X-Y|}\right].$$

1. Montrer que d définit une distance si, comme d'habitude, on identifie deux v.a. qui sont égales presque sûrement.
2. Montrer que la convergence en probabilité est équivalent à la convergence pour d.
3. Montrer que d est complète i.e. que si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. telle que $\sup_{p,q\geq n} d(X_p, X_q)$ tend vers 0, alors il existe une v.a. X telle que X_n converge en probabilité vers X.

   (Idée : montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ admet une valeur d'adhérence en considérant une sous-suite $(X_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que $d(X_{n_k}, X_{n_{k+1}}) \leq 2^{-k}$ pour tout $k \geq 1$, et montrer que cette suite est presque sûrement de Cauchy.)