# DM 7

**Exercice 1.** Soient $a, b$ deux réels et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par $X_0 = 0$, et pour $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = aX_n + b + \xi_{n+1}$$

où $(\xi_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d. de $\mathcal{N}(0,1)$ (en particulier, $\xi_{n+1}$ est indépendante de $X_n$).

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $X_n$ suit une loi gaussienne de moyenne $\mu_n$ et de variance $\sigma_n^2$ à déterminer.
2. En déduire la fonction caractéristique de $X_n$, puis les valeurs de $a$ et $b$ pour lesquelles la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi. On précisera la limite.
3. On suppose maintenant que $|a| < 1$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, le vecteur $Y_n = (X_n, X_{n+1})$ est un vecteur gaussien dont on calculera la moyenne et la matrice de covariance.
   (b) Quelle est la fonction caractéristique de $Y_n$ ? Montrer que $(X_n, X_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers un vecteur aléatoire admettant une densité sur $\mathbb{R}^2$, que l'on précisera.
   (c) En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas converger en probabilité.