

DM 8 : Estimation statistique

Exercice 1 (Loi exponentielle translatée). On observe $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ que l'on considère comme la réalisation du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, où les X_i sont des variables aléatoires i.i.d. de la loi \mathbb{P}_θ de densité $f_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{1}_{\{x \geq \theta\}}$ de paramètre inconnu $\theta \in \mathbb{R}$.

1. Soit Y une v.a. de loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que X_i a même loi que $Y + \theta$.
2. Calculer l'estimateur par la méthode des moments $\hat{\theta}_n^{\text{MM}}$ de θ . On utilisera le moment d'ordre 1.
3. Montrer que l'estimateur $\hat{\theta}_n^{\text{MM}}$ est convergent et asymptotiquement normal. Déterminer son risque quadratique moyen.
4. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{\text{MV}}$ de θ , et déterminer sa loi.
5. Vérifier si l'estimateur $\hat{\theta}_n^{\text{MV}}$ est convergent.
6. Déterminer son risque quadratique moyen $\text{RQM}_\theta(\hat{\theta}_n^{\text{MV}})$.
7. Étudier la convergence en loi de $n^\alpha(\hat{\theta}_n^{\text{MV}} - \theta)$ lorsque n tend vers l'infini. En déduire que $\hat{\theta}_n^{\text{MV}}$ n'est pas asymptotiquement normal et préciser la vitesse de convergence de l'estimateur.