PC 0 : Organisation

La PC0 est une PC d'organisation pour les 9 PCs suivantes. N'hésitez pas à me faire des retours sur les problèmes que vous avez identifiés lors de cette scéance. L'exercice suivant est donné à dans ce cadre.

Exercice 1 (CONDITIONNEMENT). L'exercice suivant est très classique et a de nombreuses variantes. Il illustre l'utilité d'une formulation mathématique rigoureuse pour éviter des pièges et des paradoxes dus à des raisonnements spécieux.
Une famille a deux enfants. On suppose les 4 configurations (ω_1, ω_2) avec ω_i le sexe du $i$ème enfant équiprobables.

1. Montrer que la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que le plus jeune enfant est une fille vaut $\frac{1}{2}$.
2. Montrer que la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que l'enfant plus âgé est une fille vaut $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que la probabilité pour que les deux enfants soient des filles sachant que l'un des enfants est une fille vaut $\frac{1}{3}$.

Solution. On note l'espace fondamental Ω. Ici il vaut

$$\Omega = \{(F,F),(F,G),(G,F),(G,G)\}.$$

On munit cet espace de la tribu $\mathcal{A}$ faites de tous les sous-ensembles de Ω :

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{(F,F)\}, \cdots, \Omega\}.$$

Cet ensemble est de cardinal $2^4 = 16$. Finalement, on munit l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}$. L'énoncé nous dit que les 4 événements $\{(F,F)\}, \{(F,G)\}, \{(G,F)\}$ et $\{(G,G)\}$ sont équiprobables ; on pose donc

$$\mathbb{P}(\{(F,F)\}) = \mathbb{P}(\{(F,G)\}) = \mathbb{P}(\{(G,F)\}) = \mathbb{P}(\{(G,G)\}) = \frac{1}{4}$$

et par la propriété de σ-additivité de $\mathbb{P}$, on étends la définition de $\mathbb{P}$ à toute la tribu $\mathcal{A}$.

Voilá pour le cadre. Pour les problèmes de conditionnement, il est important de passer un peu de temps à bien définir ce cadre probabiliste pour éviter des erreurs. On passe, maintenant, aux réponse aux questions.
La seule connaissance à avoir pour résoudre ce problème est la définition du conditionnement : si A et B sont deux événements (càd deux éléments de $\mathcal{A}$) alors la probabilité que A est lieu sachant B est noté et défini par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

1. L'événement que le plus jeune enfant est une fille correspond à l'ensemble $A \coloneqq \{(F, F), (G, F)\}$ qui se produit avec probabilité $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega| = 1/2$. Pour la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que le plus jeune enfant est une fille on obtient alors

$$\mathbb{P}(\{(F, F)\} \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\{(F, F)\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\{(F, F)\})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

2. Par le même raisonnement, en notant $B \coloneqq \{(F, F), (F, G)\}$ l'événement que l'enfant plus âgé est une fille avec $\mathbb{P}(B) = |B|/|\Omega| = 1/2$, on obtient

$$\mathbb{P}(\{(F, F)\} \mid B) = \frac{\mathbb{P}(\{(F, F)\} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\{(F, F)\})}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

3. Notons $C \coloneqq \{(F, F), (F, G), (G, F)\}$ l'événement que l'un des enfants est une fille. On a $\mathbb{P}(C) = |C|/|\Omega| = 3/4$ et donc

$$\mathbb{P}(\{(F, F)\} \mid C) = \frac{\mathbb{P}(\{(F, F)\})}{\mathbb{P}(C)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}.$$