PC 1 : Probabilités discrètes
Exercices supplémentaires

Exercice 1 (CARTES ÉLECTRONIQUES DÉFECTUEUSES)**.** On considère une usine fabriquant des cartes électroniques. Lors de la production on sait qu'une carte sur 100 000 est défectueuse. En fin de production, on effectue un test pour savoir si la carte est défectueuse ou non. Lorsque le test donne un résultat positif, ce test déclare la pièce comme défectueuse. Pour les pièces effectivement défectueuses, le test est positif dans 95% des cas, pour les pièces correctes, le test est positif (donc déclare la pièce comme défectueuse [1]) dans 1% des cas.

Quelle est la probabilité que la pièce soit effectivement défectueuse lorsque le test est positif ?

Solution. Soit D l'évenement « la pièce est défectueuse ». On a $\mathbb{P}(D) = 10^{-6}$. On note P l'événement « le test est positif ». Traduction de l'énoncé :

$$\mathbb{P}(P \mid D) = 0.95, \quad \mathbb{P}(P \mid D^c) = 0.01.$$

On cherche $\mathbb{P}(D \mid P)$; la formule de Bayes donne :

$$\mathbb{P}(D \mid P) = \frac{\mathbb{P}(P \mid D) \times \mathbb{P}(D)}{\mathbb{P}(P)}.$$

On remarque par la formule des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(P) = \mathbb{P}(P \mid D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(P \mid D^c)\mathbb{P}(D^c) = \mathbb{P}(P \mid D)\mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(P \mid D^c)(1 - \mathbb{P}(D)).$$

Enfin, on obtient

$$\mathbb{P}(D \mid P) = \frac{0.95 \times 10^{-5}}{0.95 \times 10^{-5} + 0.01 \times (1 - 10^{-5})} \approx \frac{10^{-5}}{0 + 10^{-2}} = 10^{-3}.$$

(Avec une calculatrice on obtient la valeur 0,000 949.)

Exercice 2 (UNE GARDIENNE DE NUIT)**.** Une gardienne de nuit doit ouvrir une porte dans l'obscurité et son trousseau comporte $n \geq 2$ clés dont une seule est la bonne. Elle procède selon deux méthodes bien différentes selon son état d'hébriété.

1. Lorsqu'elle est sobre, elle procède en essayant les clés une à une, sans remettre dans le trousseau les clés déjà essayées ; trouver la loi de probabilité du nombre X d'essais dans ce cas.
2. Lorsqu'elle est ivre, elle procède en essayant les clés une à une, en remettant chaque clé essayée dans le trousseau ; trouver la loi de probabilité du nombre Y d'essais dans ce cas.
3. Comparer l'espérance de X et de Y ainsi que leur variance.
4. La gardienne est ivre un jour sur trois. Sachant qu'une nuit il lui a fallu n tentatives pour ouvrir la porte, quelle est la probabilité qu'elle ait été ivre cette nuit-là ? Calculer la limite quand n tend vers l'infini.

---

1. On parle alors de « faux-positifs ».

Solution. 1. On a clairement une v.a. qui prend ses valeurs dans $\{1,\dots,n\}$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k)&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n-1}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n-k+2}\right)\frac{1}{n-k+1}\\&=\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\frac{1}{n-k+1}\\&=\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

(Si $k\notin\{1,\dots,n\}$ alors $\mathbb{P}(X=k)=0$.) La v.a. X suit donc la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. Ce résultat ne doit pas surprendre du tout : les n clés du trousseau se succèdent sans que la bonne clé soit à une position plutôt qu'à une autre, donc le nombre d'essais nécessaires pour ouvrir la porte est équiréparti entre 1 et n.

2. Maintenant on a un tirage avec remise alors qu'on avait un tirage sans remise auparavant. Soit E_k l'événement « elle choisit la bonne clé lors du k-ième essai ». Les événements $(E_k, k\geq 1)$ sont indépendants et ont tous la même probabilité $1/n$. La loi de Y est la loi géométrique de paramètre $p=1/n$. On a donc $Y\in\mathbb{N}^*$ et pour $k\geq 1$

$$\mathbb{P}(Y=k)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\,.$$

3. On sait (ou on vérifie) que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X)&=\sum_{k=1}^{n}k\,\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n+1}{2}\,,\\\mathbb{E}\big(X^2\big)&=\sum_{k=1}^{n}k^2\,\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\,,\\\mathrm{Var}(X)&=\mathbb{E}(X^2)-\big(\mathbb{E}(X)\big)^2=\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^2=\frac{n^2-1}{12},\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{p}=n\quad\text{et}\quad\mathrm{Var}(Y)=\frac{1-p}{p^2}=n(n-1).$$

Comme on s'y attend, $\mathbb{E}(X)<\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(X)<\mathrm{Var}(Y)$.

4. Soit I l'événement « la gardienne est ivre ». Introduisons la v.a. N qui vaut k si l'événement « la k-ième clé essayée est la bonne ». On applique la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(I\mid\{N=n\})=\frac{\mathbb{P}(N=n\mid I)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(N=n\mid I)\mathbb{P}(I)+\mathbb{P}(N=n\mid I^c)\mathbb{P}(I^c)}.$$

Or on a $\mathbb{P}(N=n\mid I)=\mathbb{P}(Y=n)=(\frac{n-1}{n})^{n-1}\frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(N=n\mid I^c)=\mathbb{P}(X=n)=\frac{1}{n}$. On a donc après simplifications :

$$\mathbb{P}(I\mid\{N=n\})=\frac{1}{1+2(\frac{n}{n-1})^{n-1}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{1+2\mathrm{e}}\approx 0{,}155.$$

Pour $n=25$, on a déjà $\mathbb{P}(I\mid\{N=25\})\approx 0{,}158$.

Exercice 3 (Limsup d'événements vs limsup de variables)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires ; pour tout réel x on note E_x et F_x les deux événements suivants :

$$E_x=\limsup_{n\to\infty}\{X_n\geq x\}\qquad\text{et}\qquad F_x=\{\limsup_{n\to\infty}X_n\geq x\}.$$

1. Pour tout x fixé, a-t-on $E_x \subset F_x$, $E_x \supset F_x$, ou $E_x = F_x$, ou aucun des trois ?
2. Même question avec E_x et F_y pour $x < y$.

Solution. 1. Soit $\omega \in E_x = \bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} \{X_n \geq x\}$. On a $X_n(\omega) \geq x$ pour une infinité d'indices n et donc $\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) \geq x$. Ainsi on a $E_x \subset F_x$. En revanche $F_x \not\subset E_x$ en général ; en effet si l'on prend $x = 1$ et $X_n = 1 - \frac{1}{n}$ une suite déterministe, alors on a $\limsup_{n\to\infty} X_n = 1$, de sorte que $F_1 = \Omega$, tandis que $\{X_n \geq 1\} = \emptyset$ pour tout $n \geq 1$, de sorte que $E_1 = \emptyset$.

2. Soit $\omega \in F_y$; on a $\limsup_{n\to\infty} X_n(\omega) \geq y > x$ et ainsi $F_y \subset F_x$; mais en plus, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'indices n tels que $X_n(\omega) > y - \varepsilon$. Pour ε suffisamment petit, de sorte que $y - \varepsilon \geq x$, on obtient $\omega \in E_x$. Ainsi, $F_y \subset E_x$. Évidemment, on n'a pas en revanche $E_x \subset F_y$ en général : prendre $x = 1$ et $X_n = 1 + \frac{1}{n}$, alors $E_1 = \Omega$ cette fois mais $F_y = \emptyset$ pour tout $y > 1$.

Exercice 4 (Sur le lemme de Borel–Cantelli)**.** Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements.

1. Montrer que pour tout $N \geq 1$, on a
$$\bigcup_{n\geq N} A_n = A_N \cup \bigcup_{n\geq N} (A_n^c \cap A_{n+1}),$$
2. Supposons que $\mathbb{P}(A_n) \to 0$ et $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n^c \cap A_{n+1}) < \infty$, montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.
3. Donner un exemple satisfaisant l'hypothèse précédente, mais pas $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < \infty$.
4. Montrer que si les A_n sont indépendants et tels que $\mathbb{P}(A_n) < 1$ pour tout $n \geq 1$ et $\mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} A_n) = 1$, alors $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 1$.

Solution. 1. Soit $N \geq 1$ et $\omega \in \Omega$. Supposons que $\omega \in A_N \cup \bigcup_{n\geq N}(A_n^c \cap A_{n+1})$, alors soit $\omega \in A_N$, soit (et ce n'est pas exclusif) il existe $n \geq N$ tel que $\omega \in A_{n+1}$, donc $\omega \in \bigcup_{n\geq N} A_n$. Autrement dit, directement, $A_n^c \cap A_{n+1} \subset A_{n+1}$ pour tout n donc $A_N \cup \bigcup_{n\geq N}(A_n^c \cap A_{n+1}) \subset A_N \cup \bigcup_{n\geq N} A_{n+1} = \bigcup_{n\geq N} A_n$.
Supposons réciproquement que $\omega \in \bigcup_{n\geq N} A_n$; alors il existe $n \geq N$ tel que $\omega \in A_n$; si $\omega \in A_N$, alors $\omega \in A_N \cup \bigcup_{n\geq N}(A_n^c \cap A_{n+1})$, sinon, on note $n_0 + 1 \geq N$ le premier indice $n > N$ tel que $\omega \in A_n$, alors $\omega \in A_{n_0+1}$ et $\omega \notin A_{n_0}$, donc $\omega \in A_N \cup \bigcup_{n\geq N}(A_n^c \cap A_{n+1})$.

2. Par limite décroissante, on a
$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{N\geq 1} \bigcup_{n\geq N} A_n\Big) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq N} A_n\Big),$$
d'où par la question précédente,
$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \leq \limsup_{N\to\infty} \Big(\mathbb{P}(A_N) + \sum_{n\geq N} \mathbb{P}(A_n^c \cap A_{n+1})\Big).$$
Or d'après nos hypothèses, $\mathbb{P}(A_N) \to 0$ ainsi que le reste de la série convergente $\sum_n \mathbb{P}(A_n^c \cap A_{n+1})$.

3. On se donne une variable aléatoire X sur $]0, 1]$ telle que $\mathbb{P}(X = 1/n) = \frac{1}{n(n+1)}$ pour tout $n \geq 1$ et on pose $A_n = \{X \leq 1/n\}$. Alors
$$\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k\geq n} \mathbb{P}(X = 1/k) = \sum_{k\geq n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n}$$
qui tend bien vers 0 mais n'est pas sommable, tandis que
$$\mathbb{P}(A_n^c \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(1/n < X \leq 1/(n+1)) = \mathbb{P}(X = 1/(n+1)) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
est sommable.

4. On sait que $\mathbb{P}(\bigcap_{n\geq 1} A_n^c) = 0$, i.e. par limite décroissante et indépendance,

$$0 = \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=1}^{M} A_n^c\Big) = \lim_{M\to\infty} \prod_{n=1}^{M}(1-\mathbb{P}(A_n)).$$

Or $1-\mathbb{P}(A_n) > 0$ pour tout $n \geq 1$ donc pour tout $m \geq 1$, on a également

$$0 = \lim_{M\to\infty} \prod_{n=m}^{M}(1-\mathbb{P}(A_n)) = \lim_{M\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n=m}^{M} A_n^c\Big) = \mathbb{P}\Big(\bigcap_{n\geq m} A_n^c\Big) = 1-\mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq m} A_n\Big).$$

À nouveau, on conclut par limite décroissante que

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = \lim_{m\to\infty} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n\geq m} A_n\Big) = 1.$$

Exercice 5 (Sur une convergence de variables aléatoires)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires et soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels positifs tels que

$$\sum_{n\geq 1} a_n < \infty \qquad \text{and} \qquad \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}\big(|X_{n+1}-X_n| > a_n\big) < \infty.$$

Montrer qu'il existe un événement $B \subset \Omega$ tel que $\mathbb{P}(B) = 1$ d'une part et d'autre part tel que pour tout $\omega \in B$ la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$, qui est à valeurs dans $\mathbb{R}$, est de Cauchy. En déduire que l'événement {la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge} se produit avec probabilité 1 ; on dit que « la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement ».

Solution. Pour tout $n \geq 1$, on notera A_n l'événement $\{|X_{n+1}-X_n| > a_n\}$ et

$$B = \{\limsup_n A_n\}^c = \bigcup_{N\geq 1} \bigcap_{n\geq N} A_n^c.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, on a $\mathbb{P}(B) = 1$. On fixe désormais $\omega \in B$ et on montre que la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ converge.
Comme $\omega \in B$, on sait qu'il existe un $n_0(\omega) \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0(\omega)$, on a

$$|X_{n+1}(\omega) - X_n(\omega)| \leq a_n.$$

Ainsi, pour tous $q > p \geq n_0(\omega)$, par l'inégalité triangulaire,

$$|X_q(\omega) - X_p(\omega)| \leq a_p + \ldots + a_{q-1}.$$

Soit $\varepsilon > 0$; comme la série $\sum_n a_n$ converge, il existe $n_1 \geq 1$ tel que pour tous $q > p \geq n_1$,

$$a_p + \ldots + a_{q-1} \leq \varepsilon.$$

On conclut que pour tout $q > p \geq \max(n_0(\omega), n_1)$,

$$|X_q(\omega) - X_p(\omega)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ converge est de Cauchy et donc converge.

Exercice 6 (Décimation)**.** Proba totale+Borel-Cantelli-va discrete 1. facile, 2. intensif
Le nombre d'individus dans une colonie de bactéries est modélisé par une variable aléatoire N suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. En présence d'un antibiotique, chaque individu de la population a une probabilité $p \in]0,1[$ de survivre (indépendamment des autres).

1. Déterminer la loi du nombre N_1 de bactéries survivantes. On adoptera la modélisation suivante :

$$N_1 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i,$$

où $(\varepsilon_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p qu'on supposera indépendante de N.

2. On expose de manière répétée la colonie de bactéries à ce traitement antibiotique et on note N_k, $k \geq 1$, le nombre de bactéries survivantes après la $k$ième exposition. Déterminer la loi de N_k et calculer la probabilité que la colonie ne soit encore en vie après la $k$ième exposition. Montrer enfin que presque sûrement la colonie finit par s'éteindre.

Solution. 1. Pour tout $k \geq 0$, on a en appliquant la formule des probabilités totales

$$\mathbb{P}(N_1 = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_1 = k \mid N = n)\mathbb{P}(N = n).$$

On remarque que $\mathbb{P}(N_1 = k \mid N = n) = 0$ si $k > n$. Par ailleurs, pour $n \geq k$, on a

$$\mathbb{P}(N_1 = k \mid N = n) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = k \,\middle|\, N = n\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = k \,\middle|\, N = n\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = k\right),$$

où la dernière égalité vient de l'indépendance de N et des ε_i. Pour conclure, on sait que $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$ suit une loi binomiale de paramètres n et p et donc

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = k\right) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On en déduit que pour tout $k \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_1 = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n)\, \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i = k\right) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-p\lambda}\,.
\end{aligned}$$

Conclusion : N_1 suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

2. Soit $(\varepsilon_n^k)_{n\geq 1, k\geq 1}$ un tableau de Bernoulli de paramètre p indépendantes. On définit itérativement $(N_k)_{k\geq 1}$ par la formule

$$N_k = \sum_{i=1}^{N_{k-1}} \varepsilon_i^{(k)},$$

avec la convention $N_0 = N$ (indépendante des $\varepsilon_n^{(k)}$). D'après la question précédente, N_k suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_k > 0$ vérifiant $\lambda_k = p\lambda_{k-1}$. On en déduit immédiatement que $\lambda_k = p^k\lambda$. La population n'est pas éteinte à l'instant k si et seulement si $N_k \geq 1$, événement dont la probabilité vaut

$$\mathbb{P}(N_k \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(N_k = 0) = 1 - \mathrm{e}^{-p^k\lambda} \sim p^k\lambda$$

lorsque $k \to \infty$.

1ère méthode : Comme $p \in]0,1[$, on conclut que $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(N_k \geq 1) < +\infty$. Le lemme de Borel–Cantelli entraîne donc que $\mathbb{P}(\limsup\{N_k \geq 1\}) = 0$ et donc, en passant au complémentaire, $\mathbb{P}(\liminf\{N_k = 0\}) = 1$. On conclut en remarquant que l'événement $\liminf\{N_k = 0\}$ est l'événement « la population finit par s'éteindre ».

2ème méthode : On peut également remarquer que

$$\{N_{k+1} \geq 1\} \subset \{N_k \geq 1\}$$

Les événements $A_k = \{N_k \geq 1\}$ forment donc une suite décroissante pour l'inclusion. On sait alors qu'en posant $A = \bigcap_{k\geq 1} A_k$, on a

$$\mathbb{P}(A) = \lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}(A_k) = \lim_{k\to+\infty} 1 - \mathrm{e}^{-p^k\lambda} = 0.$$

L'ensemble $A = \cap_{k\geq 1}\{N_k \geq 1\}$ représentant l'événement « la population ne s'éteint jamais », on conclut qu'avec probabilité 1 la population finit par s'éteindre.

Pour faire le lien avec la première méthode, on peut noter que comme les événements sont décroissants,

$$\limsup A_n = \bigcap_{k\geq 1} \bigcup_{l\geq k} A_l = \bigcap_{k\geq 1} A_k = A.$$

Remarque : le processus $(N_k)_{k\geq 0}$ n'est autre qu'un processus de Bienaymé–Galton–Watson avec loi de reproduction de Bernoulli de paramètre p et condition initiale de loi de Poisson.

Exercice 7 (Absence de mémoire). 1. Montrer que pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, 2, \ldots\}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) X suit une loi géométrique ;

(ii) La loi de $X - n$ sachant $\{X > n\}$ est identique à la loi de X pour tout entier $n \geq 0$.

2. Utiliser cette propriété pour calculer l'espérance et la variance de la loi géométrique.

Solution. 1. Supposons que X suit une loi géométrique de paramètre p. Alors

$$\mathbb{P}(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-p)^{k-1}p = p(1-p)^n \frac{1}{1-(1-p)} = (1-p)^n.$$

Par conséquent, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X - n = k \mid X > n) = \frac{\mathbb{P}(X = n+k)}{\mathbb{P}(X > n)} = \frac{(1-p)^{n+k-1}p}{(1-p)^n} = (1-p)^{k-1}p = \mathbb{P}(X = k).$$

Autrement dit, la loi géométrique est sans mémoire : la probabilité d'attendre un pile durant k unités de temps sachant qu'on a déjà attendu n unités de temps ne dépend pas de n.

Réciproquement, supposons que X soit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant cette propriété d'absence de mémoire et montrons que la loi de X est géométrique. Pour tout $n \geq 0$, on a donc

$$\mathbb{P}(X = k+n) = \mathbb{P}(X > n)\mathbb{P}(X = k), \qquad \forall k \geq 1.$$

En prenant $n = 1$ et en posant $q = \mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 1)$ on a donc

$$\mathbb{P}(X = k+1) = q\mathbb{P}(X = k), \qquad \forall k \geq 1,$$

d'où l'on tire $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 1)q^{k-1} = (1-q)q^{k-1}$. Le cas $q = 1$ est exclu car sinon on aurait $\mathbb{P}(X = k) = 0$ pour tout $k \geq 1$ ce qui contredit le fait que $\mathbb{P}(X \geq 1) = 1$. Lorsque $q = 0$, on a $\mathbb{P}(X = 1) = 1$ et donc la loi de X est la masse de Dirac en 1. On en conclut que, dans tous les cas, X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1-q \in]0,1]$.

2. On peut utiliser cette propriété d'absence de mémoire pour calculer les moments d'ordre 1 et 2 de X. Illustrons ceci pour les moments d'ordre 1 et 2. Par l'absence de mémoire, on a d'abord

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X-1 \mid X>1] = \frac{\mathbb{E}[(X-1)\,\mathbb{1}_{X>1}]}{\mathbb{P}(X>1)} = \frac{\mathbb{E}[X]-1}{1-p}.$$

Ainsi, $(1-p)\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X]-1$, donc $\mathbb{E}[X]=1/p$. De même

$$\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[(X-1)^2 \mid X>1] = \frac{\mathbb{E}[(X-1)^2\,\mathbb{1}_{X>1}]}{\mathbb{P}(X>1)} = \frac{\mathbb{E}[(X-1)^2]}{\mathbb{P}(X>1)},$$

et donc $(1-p)\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[X^2]-2\mathbb{E}[X]+1$, d'où $\mathbb{E}[X^2] = \frac{2\mathbb{E}[X]}{p} - \frac{1}{p} = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}$. On en déduit la variance $\mathrm{Var}(X) = (1-p)/p^2$.

Exercice 8 (Fonction génératrice)**.** Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les réels a et k soient tels que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout $n\geq 0$ par $p_n = k(\frac{a}{a+1})^n$ soit la loi de probabilité d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montre que la fonction génératrice d'une telle variable aléatoire est donnée par

$$G(s) = \frac{1}{a+1-as} \qquad (s\in[0,1]).$$

Solution. Pour que la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définisse une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$, il faut et il suffit que $p_n \in [0,1]$ pour tout n et que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. Or on a $p_n \geq 0$ pour tout $n\geq 0$ si et seulement si $k\geq 0$ et $a\geq 0$, ou bien $k=0$ mais alors $p_n=0$ pour tout $n\geq 0$; on calcule ensuite $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = k(a+1)$ et ainsi la suite $(p_n)_{n\geq 0}$ définit bien une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$ si et seulement si $a\geq 0$ et $k=\frac{1}{a+1}$.

La suite $(p_n)_{n\geq 0}$ est alors la loi géométrique de paramètre k, décalée de 1, i.e. c'est la loi du nombre de 0 avant le premier 1 dans une suite de variables i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre k.

La fonction génératrice d'une variable aléatoire X telle que $\mathbb{P}(X=n)=p_n$ pour tout $n\geq 0$ est donnée pour tout $s\in[0,1]$ par

$$G(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{n\geq 0} p_n s^n = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{a+1}\left(\frac{a}{a+1}\right)^n s^n = \frac{1}{a+1}\frac{1}{1-\frac{as}{a+1}} = \frac{1}{a+1-as}.$$

Exercice 9 (Fonction génératrice et moments)**.** Soit $p\in\,]0,1[$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{N}$ par

$$f(k) = (k+1)p^2(1-p)^k \quad \text{pour tout } k\geq 0.$$

Vérifier que f définie une probabilité au sens où l'on peut définir une variable aléatoire X dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbb{P}(X=k)=f(k)$ pour tout $k\geq 0$; calculer ensuite sa fonction génératrice puis l'espérance et la variance de X.

Solution. On a pour tout $r\in\,]0,1]$,

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)r^k = \sum_{k\geq 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r^{k+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_{k\geq 0} r^{k+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{r}{1-r} = \frac{1}{(1-r)^2}.$$

Ainsi, on a

$$\sum_{k\geq 0} f(k) = p^2\sum_{k\geq 0}(k+1)(1-p)^k = 1,$$

on peut alors définir X par $\mathbb{P}(X = k) = f(k)$ pour tout $k \geq 0$. Sa fonction génératrice est donnée pour tout $s \in [0,1]$ par

$$G_X(s) = E[s^X] = \sum_{k \geq 0} s^k f(k) = p^2 \sum_{k \geq 0} (k+1)(s(1-p))^k = \frac{p^2}{(1-s(1-p))^2}.$$

Enfin on a

$$G_X'(s) = \frac{2(1-p)p^2}{(1-s(1-p))^3} \qquad \text{et} \qquad G_X''(s) = \frac{6(1-p)^2 p^2}{(1-s(1-p))^4},$$

d'où finalement

$$\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = \frac{2(1-p)p^2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p},$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = G_X''(1) - G_X'(1)^2 + G_X'(1) = \frac{6(1-p)^2}{p^2} - \left(\frac{2(1-p)}{p}\right)^2 + \frac{2(1-p)}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2}.$$

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi (i.i.d.) donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = 2^{-k} \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Calculer les trois probabilités suivantes :

1. $\mathbb{P}(\min(X,Y) \leq k)$ pour n'importe quel $k \geq 1$,
2. $\mathbb{P}(X = Y)$,
3. $\mathbb{P}(X > Y)$.

Solution.

1. Soit $k \geq 1$, on a d'abord

$$\mathbb{P}(X > k) = \sum_{j > k} 2^{-j} = 2^{-k}.$$

Ensuite, on a $\min(X,Y) > k$ ssi $X > k$ et $Y > k$, d'où, comme X et Y sont i.i.d.

$$\mathbb{P}(\min(X,Y) \leq k) = 1 - \mathbb{P}(\min(X,Y) > k) = 1 - \mathbb{P}(X > k)^2 = 1 - 2^{-2k}.$$

2. Comme les événements $\{X = k\}$ sont deux à deux disjoints et que la probabilité de leur réunion vaut 1, on peut écrire

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = Y, X = k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k, Y = k) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X = k)^2,$$

et ainsi

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k \geq 1} 2^{-2k} = \frac{2^{-2}}{1 - 2^{-2}} = \frac{1}{3}.$$

3. Par symmétrie, on a

$$\mathbb{P}(X > Y) = \frac{\mathbb{P}(X > Y) + \mathbb{P}(Y > X)}{2} = \frac{1 - \mathbb{P}(X = Y)}{2} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 11 (Médiane et moyenne)**.** Soit X une variable aléatoire de carré intégrable. On note $\mu = \mathbb{E}[X]$ sa moyenne, $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$ sa variance, et on fixe $m \in \mathbb{R}$ une *médiane*, c'est-à-dire un nombre tel que

$$P(X \leq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}.$$

1. Montrer que $\sigma^2 = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \min_{c\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[(X-c)^2]$.
2. Montrer que $\mathbb{E}[|X-m|] = \min_{c\in\mathbb{R}} \mathbb{E}[|X-c|]$.
   Idée qui revient très souvent : on pourra commencer par montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a
   $$\mathbb{E}[|X-c|]-\mathbb{E}[|X-m|] = \mathbb{E}\left[(|X-c|-|X-m|)\,\mathbb{1}_{X\le m}\right]+\mathbb{E}\left[(|X-c|-|X-m|)\,\mathbb{1}_{X>m}\right].$$
3. En déduire une majoration de $|\mu - m|$.

Solution. 1. Soit $c \in \mathbb{R}$; on a par linéarité de l'espérance :
$$\mathbb{E}[(X-c)^2] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2 + (\mu-c)^2 + 2(X-\mu)(\mu-c)] = \sigma^2 + (\mu-c)^2,$$
d'où le résultat.

2. C'est plus compliqué ! Fixons encore $c \in \mathbb{R}$, à nouveau par linéarité de l'espérance, on a
$$\mathbb{E}[|X-c|]-\mathbb{E}[|X-m|] = \mathbb{E}\left[(|X-c|-|X-m|)\,\mathbb{1}_{X\le m}\right]+\mathbb{E}\left[(|X-c|-|X-m|)\,\mathbb{1}_{X>m}\right].$$
Supposons que $c \ge m$, alors pour n'importe quel $\omega \in \Omega$, si $X(\omega) \le m$, alors $|X(\omega) - c| - |X(\omega) - m| = (c - X(\omega)) - (m - X(\omega)) = c - m$, tandis que si $X(\omega) > m$, alors $|X(\omega) - c| - |X(\omega) - m| = |X(\omega) - c| - (X(\omega) - m) \ge -(c-m)$. Ainsi, pour $c \ge m$, on a
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X-c|]-\mathbb{E}[|X-m|] &= \mathbb{E}\left[(|X-c|-|X-m|)\,\mathbb{1}_{X\le m}\right]+\mathbb{E}\left[(|X-c|-|X-m|)\,\mathbb{1}_{X>m}\right]\\
&\ge \mathbb{E}\left[(c-m)\,\mathbb{1}_{X\le m}\right] + \mathbb{E}\left[-(c-m)\,\mathbb{1}_{X>m}\right]\\
&= (c-m)\left(\mathbb{P}(X\le m) - \mathbb{P}(X>m)\right)\\
&= (c-m)\left(2\mathbb{P}(X\le m) - 1\right),
\end{aligned}$$
qui est positif ou nul par définition de m. Notons que l'on a utilisé l'exemple 3.10 à la troisième ligne.
De même, si $c < m$, alors $-c > -m$ qui est une médiane de $-X$, donc le calcul précédent montre que
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X-c|]-\mathbb{E}[|X-m|] &= \mathbb{E}[|(-X)-(-c)|] - \mathbb{E}[|(-X)-(-m)|]\\
&\ge ((-c)-(-m))\left(2\mathbb{P}(-X\le -m) - 1\right)\\
&= |c-m|\left(2\mathbb{P}(X\ge m) - 1\right),
\end{aligned}$$
qui est également positif ou nul.
En conclusion, on a $\mathbb{E}[|X-c|] \ge \mathbb{E}[|X-m|]$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

3. On en déduit, à l'aide des propositions 3.9 et 3.11, que
$$|\mu - m| = |\mathbb{E}[X-m]| \le \mathbb{E}[|X-m|] \le \mathbb{E}[|X-\mu|] \le \sqrt{\mathbb{E}[|X-\mu|^2]} = \sigma.$$
On a ainsi montré que pour toute variable aléatoire de carré intégrable, l'écart-type majore la différence entre médiane et moyenne !

Exercice 12 (Comment « détruquer » une pièce ?)**.** On considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i\ge1}$ indépendantes et identiquement distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \,]0,1[$.

1. On introduit la variable aléatoire T définie par
   $$T = \inf\left\{n \ge 1 : (X_{2n-1}, X_{2n}) \in \{(0,1);(1,0)\}\right\}$$
   Montrer que T suit une loi géométrique dont on exprimera le paramètre r en fonction de p.

2. On considère la variable aléatoire Y définie comme suit :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si } (X_{2T-1}, X_{2T}) = (0,1) \\ 0 & \text{si } (X_{2T-1}, X_{2T}) = (1,0) \end{cases}.$$

Montrer que Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Pour cela, on commencera par calculer $\mathbb{P}(Y = 1, T = k)$, pour tout $k \geq 1$.

Solution. 1. Notons $\varepsilon_n = \mathbb{1}_{\{(X_{2n-1}, X_{2n}) \in \{(0,1);(1,0)\}\}}$. Comme les blocs de variables (X_{2n-1}, X_{2n}) sont indépendants, on conclut que les variables ε_n sont indépendantes. De plus $\varepsilon_n \in \{0, 1\}$ et

$$\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(X_{2n-1} = 0, X_{2n} = 1) + \mathbb{P}(X_{2n-1} = 1, X_{2n} = 0) = 2p(1-p).$$

En conclusion, les variables $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ sont des variables de Bernoulli de paramètre $r = 2p(1-p)$ indépendantes. Comme $T = \inf\{n \geq 1 : \varepsilon_n = 1\}$, on conclut que T suit une loi géométrique de paramètre r.

2. Notons $A = \{(0,1);(1,0)\}$; pour tout $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = 1, T = k) &= \mathbb{P}((X_{2k-1}, X_{2k}) = (0,1), (X_{2i-1}, X_{2i}) \notin A, \forall i \in \{1, \ldots, k-1\}) \\ &= p(1-p)(1-r)^{k-1}. \end{aligned}$$

En sommant cette égalité, on trouve

$$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{p(1-p)}{r} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 13 (Vol à la tire ! Conditionnement)**.** On suppose que le nombre N de clients pendant une journé dans un grand magasin suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Des voleurs sévissent dans le magasin et chaque client a ainsi une probabilité $p \in \,]0,1[$ de se faire voler son portefeuille, et ce indépendamment des autres clients ; on modélise cela à l'aide d'une suite $(X_i)_{i\geq 1}$: on note $X_i = 1$ si le ième client voit se fait voler, alors $(X_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p et indépendante de N.

1. Exprimer le nombre V de clients volés en fonction de N et des X_i.
2. Montrer que V est $N - V$ sont indépendantes et suivent une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$ pour V et $(1-p)\lambda$ pour $N - V$.

Solution. 1. On a $V = \sum_{k=1}^{N} X_k$.

2. Notons que $V \leq N$; de plus conditionnellement à $N = n$, la variable V suit simplement une loi binomiale de paramètres n et p. Soient $i, j \geq 0$ des entiers, on a ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V = i, N - V = j) &= \mathbb{P}(V = i, N = i + j) \\ &= \mathbb{P}(N = i + j)\,\mathbb{P}(V = i \mid N = i + j) \\ &= \frac{\lambda^{i+j}\,\mathrm{e}^{-\lambda}}{(i+j)!}\binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j \\ &= \lambda^i \lambda^j\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{1}{i!j!} p^i (1-p)^j \\ &= \frac{(p\lambda)^i\,\mathrm{e}^{-p\lambda}}{i!} \cdot \frac{((1-p)\lambda)^j\,\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda}}{j!}. \end{aligned}$$

En sommant sur i ou sur j, on obtient respectivement la loi de $N - V$ et de V : on reconnaît des lois de Poisson de paramètre $p\lambda$ pour V et $(1-p)\lambda$ pour $N - V$; de plus elles sont indépendantes car

$$\mathbb{P}(V = i, N - V = j) = \mathbb{P}(V = i)\,\mathbb{P}(N - V = j) \qquad \text{pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2.$$