PC 2 : Tribus et espaces de probabilité – Variables aléatoires réelles – Densités de probabilité

Les exercices 1 et 4 sont corrigés pour vous donner un exemple de rédaction. Les exercices 2, 3 et 6 seront discutés en PC.

1 Tribus et espaces mesurés

Exercice 1. On définit $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ comme la plus petite tribu de $\mathbb{R}$ qui contient tous les intervalles de la forme $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$. Montrer que les intervalles $]a, b]$, $]-\infty, a[$, $]a, b[$, $[a, b[$ et $[a, b]$ appartiennent à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tous réels $a < b$.

Solution. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$.

1. On a $]a, b] = \,]-\infty, a]^c \cap \,]-\infty, b]$. Comme une tribu est stable par intersection et passage au complémentaire, on obtient que $]a, b] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
2. On a $]-\infty, a[\, = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]-\infty, a - 1/n]$. Comme une tribu est stable par union dénombrable, on obtient bien que $]-\infty, a[\, \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
3. Il suffit de remarquer que $]a, b[\, = \,]a, b] \cap]-\infty, b[$ et d'utiliser les deux points précédents.
4. On a $[a, b[\, = \,]-\infty, b[\cap [a, +\infty[\, = \,]-\infty, b[\cap]-\infty, a[^c$. Comme une tribu est stable par intersection et passage au complémentaire, on obtient le résultat escompté en utilisant le second point.
5. On a $[a, b] = \,]-\infty, b] \cap [a, +\infty[\, = \,]-\infty, b] \cap \,]-\infty, a[^c$. On conclut alors comme pour le point précédent.

Exercice 2. On appelle « boréliens » les ensembles dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$; on rappelle que la mesure de Lebesgue Leb est l'unique mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que $\mathrm{Leb}(]a, b[) = b - a$ pour touts réels $a < b$.

1. Montrer que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que tout sous-ensemble dénombrable de $\mathbb{R}$ est borélien et de mesure de Lebesgue nulle.
3. Soit $N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Montrer que N^c est dense dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on pourra montrer raisonner par l'absurde et considérer $t \in \mathbb{R}$ tel que il existe un voisinage ouvert O de cet élément vérifiant $O \cap N^c = \emptyset$.

Solution. 1. En passant au complémentaire, on voit que $]a,+\infty[\ \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En considérant $I_n =]a_n,+\infty[$, avec $a_n = a - 1/n$, et en remarquant que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} I_n = [a,+\infty[$ on conclut que les intervalles de la forme $[a,+\infty[$ sont aussi dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Enfin, comme $\{a\} = [a,+\infty[\,\cap\,]-\infty,a]$ on conclut que $\{a\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Remarque : On voit par des arguments analogues que la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient tous les intervalles de $\mathbb{R}$. On en déduit facilement qu'elle contient tous les ensembles ouverts. En effet, si O est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$, alors on peut écrire $O = \bigcup_{x,y\in O\cap\mathbb{Q}}]x,y[$ et cette union porte sur un ensemble d'indices dénombrable. Enfin, en passant au complémentaire, on conclut que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ contient aussi tous les ensembles fermés de $\mathbb{R}$.

2. Si A est un ensemble dénombrable, alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \neq x_m$ pour tout $n \neq m$ et $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. En écrivant $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{x_n\}$ et en utilisant la question précédente, on voit que $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Notons Leb la mesure de Lebesgue ; on a alors par union disjointe $\mathrm{Leb}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Leb}(\{x_n\})$. Mais par définition de la mesure de Lebesgue, $\mathrm{Leb}(\{a\}) = \mathrm{Leb}([a,a]) = a - a = 0$. On en déduit que $\mathrm{Leb}(A) = 0$.

3. Pour montrer la densité de N^c dans $\mathbb{R}$, il faut montrer que pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$ de la forme $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$, on a $I \cap N^c \neq \emptyset$. Si ce n'était pas le cas, on aurait $I \subset N$ et donc $\mathrm{Leb}(I) \leq \mathrm{Leb}(N) = 0$. On aurait alors $\mathrm{Leb}(I) = 0$ ce qui contredit le fait que $\mathrm{Leb}(I) = 2\varepsilon > 0$. On conclut que N^c est bien dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Tribu engendrée par une fonction)**.** On considère une fonction $X : \Omega \to E$. Si $\mathcal{E}$ est une tribu sur E, montrer que

$$\mathcal{A} = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{E}\}$$

est une tribu sur Ω.

Solution. Montrons que $\mathcal{A}$ est une tribu :

— $\Omega = X^{-1}(E)$ avec $E \in \mathcal{E}$ donc $\Omega \in \mathcal{A}$.

— Soit $B \in \mathcal{A}$. Par définition, il existe $A \in \mathcal{E}$ tel que $B = X^{-1}(A)$. Mais,

$$B^c = \left(X^{-1}(A)\right)^c = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \notin A\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A^c\} = X^{-1}(A^c).$$

Comme $\mathcal{E}$ est une tribu et $A \in \mathcal{E}$, on a aussi $A^c \in \mathcal{E}$ et donc $B^c \in \mathcal{A}$.

— Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $A_n \in \mathcal{E}$ tel que $B_n = X^{-1}(A_n)$. Mais

$$\begin{aligned}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{-1}(A_n) &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A_n\} \\ &= \left\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right\} = X^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).\end{aligned}$$

Comme $\mathcal{E}$ est une tribu et $A_n \in \mathcal{E}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a aussi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$ et donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{A}$.

2 Variables aléatoires réelles

Exercice 4 (Loi uniforme)**.** Soit U une v.a. uniforme sur $[0,1]$. On définit $X = \min(U, 1-U)$ et $Y = \max(U, 1-U)$. Trouver les lois de X et Y.

Solution. La variable aléatoire Y prend ses valeurs dans $[1/2, 1]$ et pour tout $t \in [1/2, 1]$,

$$F_Y(t) = \mathbb{P}(U \leq t, 1-U \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t, U \geq 1-t) = t - (1-t) = 2t - 1$$

donc Y suit la loi uniforme sur $[1/2, 1]$. On remarque que $X = 1 - Y$ et on en déduit que X suit la loi uniforme sur $[0, 1/2]$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de densité f et de fonction de répartition F, soit un intervalle A et soit $Y = \mathbb{1}_A(X)$. Donner la fonction de répartition de Y.

Exercice 6 (Simulation par la méthode d'inversion)**.** Comment créer des réalisations d'une loi de probabilité donnée à l'aide d'un ordinateur ? Il existe de nombreuses méthodes différentes en fonction de la loi que l'on souhaite simuler. L'ingrédient de base de toutes ces méthodes est un générateur de (pseudo-)variables aléatoires indépendantes de la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$. En effet, tout bon langage de programmation est équipé d'un tel générateur. Certaines méthodes de simulation consistent à tirer une réalisation de la loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ et à appliquer une transformation telle que le résultat suit la loi souhaitée. D'autres méthodes plus complexes nécessitent plusieurs réalisations de la loi uniforme, qui sont combinées de sorte qu'on obtienne une réalisation de la loi souhaitée.

Pour la méthode de simulation dite d'inversion on considère une fonction de répartition F sur $\mathbb{R}$ et on introduit son inverse généralisée définie par

$$p \in [0,1] \mapsto F^{\leftarrow}(p) = \inf\{x;\, F(x) \geq p\} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

1. Montrer en utilisant que F est continue à droite que pour tout $p \in]0,1[$, $F(F^{\leftarrow}(p)) \geq p$.
2. Montrer que $F^{\leftarrow}(p) \leq x$ si et seulement si $p \leq F(x)$ pour tout $p \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, la variable aléatoire $X = F^{\leftarrow}(U)$ a pour fonction de répartition F.
4. Déduire de la question précédente une méthode générale de simulation de variables aléatoires réelles et l'appliquer au cas d'une variable exponentielle.
5. Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles dont la fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $p \in]0,1[$, $F \circ F^{\leftarrow}(p) = p$. En déduire la loi de $F_X(X)$?

Solution. Dans cet exercice, si cela n'est pas indiqué on prolonge F en posant $F(+\infty) = 1$ et $F(-\infty) = 0$.

1. Une fonction de répartition étant croissante, on en déduit que si $p \in]0,1[$, alors $I(p) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : F(x) \geq p\}$ est un intervalle non vide de la forme $[a, +\infty]$ ou $]a, +\infty]$, avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrons que $I(p) = [a, +\infty]$. Si $a = +\infty$, c'est évident. Supposons donc $a < +\infty$. Le fonction F est continue à droite, donc si a_n est une suite strictement décroissante convergeant vers a (il existe toujours une telle suite, même si $a = -\infty$), on a $F(a_n) \downarrow F(a)$. Or, pour tout n, $a_n > a$ donc $a_n \in I$ et donc $F(a_n) \geq p$. En passant à la limite, on trouve donc $F(a) \geq p$ ce qui prouve que $a \in I(p)$. Comme $a = \inf I(p) = F^{\leftarrow}(p)$, on a montré que $F(x) \geq p$ si et seulement si $x \geq a = F^{\leftarrow}(p)$.
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}(F^{\leftarrow}(U) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq F(t)) = F(t).$$
On a donc bien $F_X = F$.
3. Si $F^{\leftarrow}$ possède une expression explicite, il suffit de poser $X = F^{\leftarrow}(U)$ où U est une variable aléatoire uniforme sur $[0,1]$ (on utilise pour cela le générateur de nombres aléatoires du logiciel). Dans le cas où $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, avec $\lambda > 0$, on trouve $F^{\leftarrow}(p) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-p)$. Comme U et $1 - U$ ont même loi uniforme sur $[0,1]$, on déduit de la question précédente que la variable $-\frac{1}{\lambda}\ln(U)$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.
4. Montrons que pour tout $p \in]0,1[$, $F \circ F^{\leftarrow}(p) = p$.
On a déjà montré plus haut que $F \circ F^{\leftarrow}(p) \geq p$ pour tout $p \in]0,1[$. Montrons l'inégalité dans l'autre sens. Soit $p \in]0,1[$; pour tout $n \geq 1$, $F^{\leftarrow}(p) - 1/n < F^{\leftarrow}(p)$ et donc par définition de $F^{\leftarrow}(p)$, on a $F(F^{\leftarrow}(p) - 1/n) < p$. Comme F est supposée continue sur $\mathbb{R}$, on voit en passant à la limite quand $n \to +\infty$ que $F(F^{\leftarrow}(p)) \leq p$. Le même raisonnement marche également si $p = 1$ et $F^{\leftarrow}(p) < +\infty$.
On peut maintenant donner la loi de $Y = F_X(X)$. D'après la question 2., on peut supposer sans perte de généralité que $X = F_X^{\leftarrow}(U)$ avec U une variable uniforme sur $[0,1]$. On a alors
$$\mathbb{P}(Y \leq t) = \mathbb{P}(F_X(F_X^{\leftarrow}(U)) \leq t) = \mathbb{P}(U \leq t), \qquad \forall t \in \mathbb{R},$$
et donc Y suit une loi uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 7. Considérons une variable aléatoire X continue à valeurs positives représentant la durée de vie d'une ampoule, de fonction de répartition F et de densité f continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$. La fonction *taux de panne* associée est définie pour tout $t > 0$ par
$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}.$$

1. Soit g une fonction continue sur $]0, +\infty[$ et $t \in]0, +\infty[$, en appliquant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à une primitive de g (parfois appelée formule de la moyenne), montrer que
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_t^{t+\epsilon} g(x)\mathrm{d}x = g(t).$$
2. En déduire que pour tout $t > 0$,
$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}(X \in]t, t+\epsilon[\mid X > t) = \lambda(t).$$
On interprète $\lambda(t)$ comme le taux de panne conditionnel instantané en supposant que l'ampoule fonctionnait encore au temps t.
3. Calculer la fonction taux de panne quand X suit une loi exponentielle.
4. Montrer que l'on peut caractériser la loi de X par sa fonction taux de panne λ : plus précisément, donner une expression de F en fonction de λ.
5. Exprimer la fonction de répartition associée à un taux de panne affine $\lambda : t \mapsto a + bt$. Pour $a = 0$, la loi obtenue est appelée *loi de Rayleigh*.

3 Exercices qui anticipent le cours 3

Exercice 8. Calculer l'espérance et la variance des lois : uniforme sur un intervalle $\mathcal{U}([a, b])$, exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Exercice 9 (Calculs de moments)**.**
1. Montrer que si X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ alors $\mathbb{E}(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$;
2. Montrer que si X suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors $\mathbb{E}(X^{2n}) = \prod_{k=1}^n (2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$.

Exercice 10 (Caractérisation par les moments)**.** Montrer que si deux variables aléatoires *bornées* X et Y ont les mêmes moments, c'est-à-dire que $\mathbb{E}(X^n) = \mathbb{E}(Y^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors X et Y ont même loi. On pourra utiliser pour cela la densité des polynômes dans l'ensemble des fonctions continues sur un compact $K \subset \mathbb{R}$ et que X et Y ont même loi si et seulement si pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(f(Y))$.

Exercice 11. Soit μ une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ intégrable. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mu(A) \leq \eta$ implique $\int_A f(s)\mathrm{d}\mu(s) \leq \epsilon$.
1. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que il existe $M \geq 0$ tel que, en posant $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq M\}$,
$$\int_A f(s)\mathrm{d}\mu(s) \leq \epsilon/2 + \int_{A \cap B} f(s)\mathrm{d}\mu(s)\ .$$
2. Conclure.