PC 3 : Variables aléatoires réelles - Vecteurs aléatoires

Les exercices (4), (6), (10) et (3) seront corrigés (dans cet ordre) en PC.

1 Espérance, Variance et loi d'une variable aléatoire réelle

Exercice 1. Calculer l'espérance et la variance des lois : uniforme sur un intervalle $\mathcal{U}([a,b])$, exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ et gaussienne $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$.

Exercice 2. Soit X une variable distribuée selon la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable $Y = \sqrt{X}$.

Solution. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Par la formule de transfert, on a

$$\mathbb{E}[f(Y)] = \mathbb{E}[f(\sqrt{X})] = \lambda \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x}) e^{-\lambda x}\, dx.$$

En faisant le changement de variable $x = u^2$, $u \geq 0$, dans l'intégrale précédente, on voit que

$$\mathbb{E}[f(Y)] = 2\lambda \int_0^{+\infty} f(u) u e^{-\lambda u^2}\, du = \int_{\mathbb{R}} f(u) h(u)\, du,$$

avec $h(u) = 2\lambda u e^{-\lambda u^2} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(u)$, $u \in \mathbb{R}$. L'égalité précédente étant vraie pour toute fonction f mesurable bornée, on en déduit que Y admet la densité h.

Exercice 3. Soit V une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,\pi]$. Déterminer la loi de $\sin(V)$.

Solution. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée. Comme $f(\sin(V))$ est bornée, l'espérance est bien définie. Par la Proposition 4.5.1 on a :

$$\mathbb{E}[f(\sin(V))] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\sin(x)) \mathrm{d}x.$$

Changement de variable $u = \sin(x)$ mais attention : sin n'est pas injective sur $[0,\pi]$. On regarde $[0,\pi/2]$ et $[\pi/2,\pi]$. On remarque :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} f(\sin(x)) \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\sin(\pi - x)) \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} f(\sin(x)) \mathrm{d}x,$$

et ainsi

$$\mathbb{E}[f(\sin(V))] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\sin(x)) \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}} \mathrm{d}u,$$

en faisant le changement de variable $u = \sin(x)$. Donc la densité de $\sin(V)$ notée ϕ est donnée par

$$\phi(x) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathbb{1}_{0 \leq x < 1}\,.$$

Exercice 4 (Loi de Cauchy)**.** Soit X une variable aléatoire de Cauchy, de densité donnée par $x \mapsto (\pi(1+x^2))^{-1}$. Reconnaître la loi de $1/X$ en utilisant la méthode de la fonction muette.

Solution. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue bornée. On a

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{X}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{\pi(1+x^2)} \mathrm{d}x.$$

On a envie de faire le changement $u = 1/x$, donc $\mathrm{d}u = -u^2 \mathrm{d}x$, mais pas bijectif sur $\mathbb{R}$! on scinde donc en deux en 0 : d'une part

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{\pi(1+x^2)} \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(u) \frac{1}{u^2} \frac{1}{\pi(1+u^{-2})} \mathrm{d}u$$
$$= \int_0^{+\infty} f(u) \frac{1}{\pi(1+u^2)} \mathrm{d}u,$$

et de même :

$$\int_{-\infty}^{0} f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{1}{\pi(1+x^2)} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} f(u) \frac{1}{\pi(1+u^2)} \mathrm{d}u.$$

Donc $\frac{1}{X}$ a même loi que X... comme vu dans la PC2.

Exercice 5. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un même espace de probabilité.

1. On suppose que $\mathbb{P}(X = Y) = 1$. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

2 Inégalités

Exercice 6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Soit X, Y deux variables aléatoires réelles telles que $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]} \tag{1}$$

1. Vérifier que pour tout $x, z \in \mathbb{R}$, $xz \leq \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2}$. En déduire que si $\mathbb{E}[Z^2] < +\infty$, alors XZ est intégrable et
$$\mathbb{E}[|XZ|] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z^2].$$
2. En appliquant l'inégalité précédente à $Z = tY$, avec $t > 0$, montrer (1).

Solution. 1. L'inégalité vient de $(x-z)^2 \geq 0$. On en déduit que $|XZ| \leq \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{2}Z^2$. Par comparaison on conclut que XZ est intégrable et que
$$\mathbb{E}[|XZ|] \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z^2].$$

2. Si $\mathbb{E}[X^2] = 0$ ou $\mathbb{E}[Y^2] = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons que $\mathbb{E}[X^2] \neq 0$ et $\mathbb{E}[Y^2] \neq 0$ et appliquons l'inégalité précédente à $Z = tY$, avec $t > 0$. On a alors
$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \frac{1}{2t}\mathbb{E}[X^2] + \frac{t}{2}\mathbb{E}[Y^2].$$
En prenant $t = \frac{\mathbb{E}[X^2]^{1/2}}{\mathbb{E}[Y^2]^{1/2}}$, on obtient
$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}\sqrt{\mathbb{E}[Y^2]}$$
qui entraîne (1).

Exercice 7.
Soit X une variable aléatoire réelle de carré intégrable centrée (i.e. telle que $\mathbb{E}(X) = 0$) et $a > 0$.

1. Montrer que $a \leq \mathbb{E}\left((a - X)\mathbb{1}_{\{X<a\}}\right) \leq \sqrt{\mathbb{P}(X < a)} \times \sqrt{\mathrm{Var}(X) + a^2}$. On utilisera le résultat de l'exercice 6.
2. En déduire que $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\mathrm{Var}(X)+a^2}$ et comparer avec la majoration obtenue par l'inégalité de Bienaymé Chebychev.

Exercice 8. (Inégalité de Paley-Zygmund) Soit X une variable aléatoire réelle intégrable telle que $\mathbb{E}[X] \geq 0$.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, $X \leq \lambda \mathbb{E}[X] + X \mathbb{1}_{\{X > \lambda \mathbb{E}[X]\}}$.
2. On suppose que, de plus, $0 < \mathbb{E}[X^2] < +\infty$. Montrer, en utilisant le résultat de l'exercice 6, que pour tout $\lambda \in]0,1[$ on a
$$\mathbb{P}(X > \lambda \mathbb{E}[X]) \geq (1-\lambda)^2 \frac{\mathbb{E}[X]^2}{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Exercice 9. Soit X une variable aléatoire de carré intégrable.

1. Montrer que $\mathrm{Var}(X) = \inf_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{E}[(X-c)^2]$.
2. En déduire que si X est à valeurs dans $[a,b]$, alors $\mathrm{Var}(X) \leq \frac{1}{4}(b-a)^2$. Peut-il y avoir égalité ?

3 Loi jointe-loi marginale-vecteurs aléatoires

Exercice 10 (Lois jointes, lois marginales et lois conditionnelles)**.** Soit (X, Y) et (X', Y') des couples de variables aléatoires de densités

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{1}{4}(1+xy)\,\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x,y) \quad \text{et} \quad f_{(X',Y')}(x',y') = \frac{1}{4}\,\mathbb{1}_{[-1,1]^2}(x',y').$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien de densités.
2. Montrer que (X, Y) et (X', Y') ne suivent pas la même loi.
3. Montrer que (X, Y) et (X', Y') ont les mêmes lois marginales, c'est-à-dire que X et X' sont de même loi, et que Y et Y' sont de même loi (en fait X, X', Y, Y' sont de même loi !).

Solution. 1. Clairement, $f_{(X,Y)} \geq 0$ et $f_{(X',Y')} \geq 0$ sur $\mathbb{R}^2$. On remarque que $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ et $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$. Ainsi

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{(X',Y')}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1.$$

2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geq 0, Y \geq 0) &= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1 1 + xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 \mathrm{d}y + \int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^1 y\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{16} \\
\mathbb{P}(X' \geq 0, Y' \geq 0) &= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Donc (X, Y) et (X', Y') n'ont pas la même loi.

3. $f_{X'}(x) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\mathrm{d}u$ et de même $f_{Y'}(y) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$. De plus

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{4} + xy\right)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x),$$

de même $f_Y(y) = \frac{1}{2}\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$.

Exercice 11. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ dont la loi a pour densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \frac{2}{\pi} e^{-x(1+y^2)} \mathbb{1}_{x,y \geq 0} .$$

1. Vérifier que $f_{(X,Y)}$ est bien une densité.
2. Déterminer les lois de X et de Y.

Exercice 12. On considère un gâteau circulaire avec une cerise sur le bord. On découpe le gâteau en deux parts en coupant suivant deux rayons choisis au hasard.

1. Avec quelle probabilité la part contenant la cerise est-elle plus petite que la part ne contenant pas la cerise ?
2. Quelle est la longueur angulaire moyenne de la part contenant la cerise ?