PC 4 : Vecteurs aléatoires à densités - lois conditionnelles

On corrigera les exercices (1), (4), (6) et (10) (dans cet ordre) en PC.

Exercice 1. (UN CONTRE-EXEMPLE CLASSIQUE)
Construire un couple de v.a. (X, Y) tel que : X et Y sont 2 v.a. gaussiennes, $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ et X n'est pas indépendante de Y.

Solution. Soit X une v.a. de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $a > 0$. Posons

$$Y = X \mathbb{1}_{\{|X|>a\}} - X \mathbb{1}_{\{|X|\leq a\}} .$$

Il est clair que Y est de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et que X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbb{P}(X + Y = 0) \in]0, 1[$. Enfin

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 2 \left(- \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, dx + \int_a^{+\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, dx \right) := \varphi(a).$$

Une rapide étude de la fonction φ montre qu'il existe un unique a tel que $\varphi(a) = 0$.
Une autre solution consiste à prendre $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et ϵ une variable de Rademacher (cád, uniformément distribuée sur $\{-1, 1\}$) indépendante de X. Comme X est symétrique, on peut voir que $Y = \epsilon X$ suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$. En effet, si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue à support compact alors

$$\mathbb{E}g(Y) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(\epsilon X)|X]] = \frac{1}{2} (\mathbb{E}g(-X) + \mathbb{E}g(X)) = \mathbb{E}g(X)$$

et donc $Y \sim X$ càd $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Comme ϵ est indépendante de X et centrée, on a

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[X\epsilon X] = \mathbb{E}[\epsilon]\mathbb{E}[X^2] = 0.$$

Cependant, X et Y ne sont pas indépendantes vu que $\mathbb{P}[X = Y] = \mathbb{P}[\epsilon = 1] = 1/2$. En effet, si U est indépendante de V et à densité alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[U = V] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[I(U = V)|V]] &= \int_{v\in\mathbb{R}} \int_{u\in\mathbb{R}} I(u = v) d\mathbb{P}_{U|V=v}(u) d\mathbb{P}_V(v) \\
&= \int_{v\in\mathbb{R}} \left(\int_{u\in\mathbb{R}} I(u = v) d\mathbb{P}_U(u) \right) d\mathbb{P}_V(v)
\end{aligned}$$

et comme U est à densité on a pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$\int_{u\in\mathbb{R}} I(u = v) d\mathbb{P}_U(u) = \mathbb{P}[U = v] = 0$$

car la mesure de Lebesgue ne charge pas les singletons.
But de l'exercice : On rappelle le résultat suivant : soit $(X^\top, Y^\top)^\top$ un vecteur Gaussien on a X et Y sont indépendants si et seulement si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. Ici, dans cet exercice, on veut montrer que si X et Y sont des Gaussiennes alors $(X^\top, Y^\top)^\top$ n'est pas forcément un vecteur Gaussien et donc ce n'est pas parce qu'ils ne sont pas corrélés qu'ils sont indépendants. Il ne faut donc pas faire l'erreur de croire que si deux Gaussiennes (ou vecteurs Gaussiens) ne sont pas corrélés alors ils sont indépendants, ceci n'est pas suffisant, il faut en plus que leur loi jointe soit une Gaussienne pour pouvoir utiliser l'implication "non corrélés implique indépendants".

Exercice 2. Soit (X_1, X_2, X_3) un vecteur aléatoire centré de matrice de variance covariance

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

1. Calculer la variance de $X_3 - \alpha_1 X_1 - \alpha_2 X_2$ pour $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.
2. En déduire qu'il existe une constante c telle que $X_3 = X_1 + X_2 + c$ p.s.

3. Plus généralement, on considère un vecteur aléatoire Y à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de matrice de variance covariance Γ.
   (a) Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n u_i Y_i) = u^\top \Gamma u$.
   (b) En déduire que Γ est non-inversible si et seulement si l'une des composantes de Y est presque sûrement égale à une fonction affine des autres composantes de Y.
4. Si Y est un vecteur aléatoire de matrice de variance covariance non-inversible, peut-il avoir une densité ? Le vecteur (X_1, X_2, X_3) a-t-il une densité ?

Exercice 3 (Couples de variables aléatoires, densité et indépendance).

1. Déterminer la constante c pour que la fonction $f(x,y) = c(x^2+y^2)\exp(-\frac{x^2+y^2}{2})$ soit une densité sur $\mathbb{R}^2$. Si (X,Y) est un couple qui suit cette densité, déterminer ses lois marginales, ainsi que la covariance de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Soit (X,Y) un couple de v.a.r. de loi uniforme sur le disque $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Montrer que les v.a.r. X et Y ont même loi et calculer leur densité. Sont-elles indépendantes ?
3. Soit (X,Y) un vecteur aléatoire à densité. Montrer que $\mathbb{P}(X=Y) = 0$. Si X est une v.a.r, le vecteur (X,X) a-t-il une densité ?

Solution. 1. En appliquant le théorème de Fubini à la fonction positive f, on trouve :

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} (x^2+y^2)\exp(-(x^2+y^2)/2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\iint_{\mathbb{R}^2} x^2 \exp(-(x^2+y^2)/2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} x^2\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y = 4\pi,\end{aligned}$$

en utilisant le fait que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est une densité dont le moment d'ordre 2 vaut 1. On en déduit la valeur de la constante de renormalisation : $c = 1/(4\pi)$. On sait que si (X,Y) est un vecteur aléatoire de densité f sur $\mathbb{R}^2$, alors X et Y admettent également des densités f_X et f_Y données par les formules

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{et} \qquad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Par symétrie de f, il est clair qu'ici $f_X = f_Y$ (autrement dit X et Y ont la même loi). Calculons f_X :

$$f_X(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} (x^2+y^2)\exp(-(x^2+y^2)/2)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

Déterminons $\mathbb{E}(X)$:

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = 0$$

par imparité. Calculons $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(XY)$:

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{4\pi}\iint_{\mathbb{R}^2} xy(x^2+y^2)\exp(-(x^2+y^2)/2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

toujours par imparité. Finalement,

$$f_X(x)f_Y(y) = \frac{1}{8\pi}(x^2+1)(y^2+1)\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$$

et donc $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ et on en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

2. Notons $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. La densité d'un vecteur aléatoire (X,Y) uniformément distribué sur D est $f_{(X,Y)} = \frac{1}{\pi}\,\mathbb{1}_D$. Déterminons les lois marginales : si $|x| \leq 1$,

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x^2+y^2\leq 1}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{|y|\leq\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2},$$

et si $|x| > 1$, on voit que $f_X(x) = 0$. Par symétrie, $f_Y = f_X$. La loi commune de ces deux variables est appelée « loi du demi-cercle ».

3. En notant f cette densité, on a en appliquant la formule de transfert

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=Y) &= \iint \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}}\, f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}}\, f(x,x)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int f(x,x)\left(\int \mathbb{1}_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x=y\}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= \int f(x,x)\left(\int_{\{x\}} 1\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 0,\end{aligned}$$

où la troisième égalité vient du théorème de Fubini, et la dernière du fait que le singleton $\{x\}$ est de mesure nulle. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{P}(X=X)=1$ et, donc d'après ce qui précède, le vecteur (X,X) n'a pas de densité sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles à densité sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que X et Y sont indépendantes.

(1) Montrer que
$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \mathbb{E}[X].$$

(2) Plus généralement, montrer que $\mathbb{E}[h(X,Y) \mid X] = \Phi(X)$, avec
$$\Phi(x) = \mathbb{E}[h(x,Y)].$$

Solution. (1) Par définition, $\mathbb{E}[X \mid Y] = \Psi(Y)$, avec
$$\Psi(y) = \int_{\mathbb{R}} x\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x.$$

Or X et Y sont indépendantes, donc $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$. On en déduit que
$$\Psi(y) = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x)\mathrm{d}x = \mathbb{E}[X].$$

Donc $\mathbb{E}[X \mid Y]$ est une variable aléatoire constante qui vaut $\mathbb{E}[X]$.

(2) Par définition, $\mathbb{E}[h(X,Y) \mid X] = \Phi(X)$ avec
$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)\frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} h(x,y)f_Y(y)\mathrm{d}y = \mathbb{E}[h(x,Y)].$$

Exercice 5 (Lois uniformes)**.**

1. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles. Montrer que (X,Y) suit la loi uniforme sur le carré $[0,1]^2$ si et seulement si X et Y sont indépendantes et de loi uniforme sur $[0,1]$;
2. On coupe un bâton au hasard en trois morceaux en utilisant deux v.a. indépendantes et uniformes sur $[0,1]$ pour déterminer les points de coupe. Vérifier que les longueurs des trois morceaux ainsi obtenus sont des v.a. de même loi. Sont-elles indépendantes ? Quelle est la probabilité de pouvoir former un triangle avec ces trois morceaux ?
3. Deux amis se donnent rendez vous entre 12h et 13h, et arrivent indépendamment uniformément entre ces deux horaires. Calculer le temps moyen d'attente du premier arrivé.

Exercice 6. Une personne décide de vendre sa maison au premier acheteur qui fera une offre supérieure ou égale à s euros. On suppose que les offres $(X_1, X_2, \dots)$ sont indépendantes et suivent la même loi qu'une variable aléatoire X.

1. Soit $N \geq 1$ le nombre d'offres nécessaires pour vendre la maison. Quelle est la loi de N ?
2. Déterminer la loi du prix de vente X_N de la maison, et montrer que le prix de vente est indépendant de N.

Solution. 1. Soit $k \geq 1$; on a $N > k$ si et seulement si $X_1 < s, \ldots X_k < s$; comme ces variables sont indépendantes et de même loi que X, on obtient

$$\mathbb{P}(N > k) = \mathbb{P}(X < s)^k = (1 - \mathbb{P}(X \geq s)^k ,$$

et on reconnaît la queue de distribution de la loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}(X \geq s)$. Si on ne la reconnaît pas, on peut écrire

$$\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}(N > k-1) - \mathbb{P}(N > k) = (1 - \mathbb{P}(X \geq s))^{k-1}\mathbb{P}(X \geq s) .$$

2. Déterminons la loi de X_N en calculant $\mathbb{P}(X_N \geq u)$ pour tout $u \geq 0$. Comme $X_N \geq s$, il est clair que $\mathbb{P}(X_N \geq u) = 1$ si $u \leq s$. Maintenant, si $u > s$, en utilisant la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_N \geq u) &= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_N \geq u, N = k) \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_k \geq u, N = k) \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X_k \geq u, X_1 < s, \ldots, X_{k-1} < s) \\
&= \sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X \geq u)\,\mathbb{P}(X \leq s)^{k-1} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X \geq u)}{\mathbb{P}(X \geq s)}.
\end{aligned}$$

On remarque que $\mathbb{P}(X_N \geq u) = \mathbb{P}(X \geq u \mid X \geq s)$: ainsi, X_N suit la loi conditionnelle de X sachant que $X \geq s$.

Pour montrer que N et X_N sont indépendants, il suffit de montrer que

$$\mathbb{P}(N = k, X_N \geq u) = \mathbb{P}(N = k)\,\mathbb{P}(X_N \geq u)$$

pour tous $k \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}$. Comme c'est clair pour $u \leq s$ (les deux termes valent $\mathbb{P}(N = k)$), on peut supposer que $u > s$. Alors, d'après les calculs précédents

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N = k, X_N \geq u) &= \mathbb{P}(X \geq u)\,\mathbb{P}(X \leq s)^{k-1} \\
&= \left(\frac{\mathbb{P}(X \geq u)}{\mathbb{P}(X \geq s)}\right) \cdot \left((1 - \mathbb{P}(X \geq s))^{k-1}\mathbb{P}(X \geq s)\right) \\
&= \mathbb{P}(X_N \geq u) \cdot \mathbb{P}(N = k) .
\end{aligned}$$

Ainsi, X_N et N sont indépendants.

Exercice 7 (Sur l'algorithme du rejet)**.**

1. On considère une fonction $\tilde{g}$, positive, et intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'algorithme
   — Tirer X suivant la densité $a\tilde{g}$, où a est une constante de renormalisation
   — Tirer U suivant une loi uniforme sur $[0, \tilde{g}(X)]$
   permet de tirer (X, U) suivant une loi uniforme sur l'ensemble

$$\mathcal{A} = \left\{(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \text{ t.q. } 0 \leq u \leq \tilde{g}(x)\right\} .$$

2. Réciproquement, si (X, U) suit une loi uniforme sur $\mathcal{A}$ quelle est la loi de X ?
3. On considère maintenant deux densités f et g telles que $f(x) \leq cg(x)$ pour tout x. Montrer que l'algorithme "Tirer uniformément (X, U) sur $\mathcal{A}$ (avec $\tilde{g} = cg$) jusqu'à ce que la marginale U soit intérieure à $f(X)$" donne un vecteur (X, U) de loi uniforme sur

$$\mathcal{B} = \left\{(x, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \text{ t.q. } 0 \leq u \leq f(x)\right\} .$$

En déduire une interprétation graphique de l'algorithme du rejet.

Exercice 8 (Simulation de la loi Gamma). On rappelle que pour $a, \lambda > 0$, la densité de la loi Gamma $\Gamma(a, \lambda)$ est donnée par

$$f_{\Gamma(a,\lambda)}(z) = \frac{\lambda^a z^{a-1}}{\Gamma(a)} \, \mathrm{e}^{-\lambda z} \, \mathbb{1}_{\{z>0\}} \, .$$

On suppose dans la suite que $a > 1$ et on note

$$g_a(z) = z^{a-1} \, \mathrm{e}^{-z} \, \mathbb{1}_{\{z>0\}} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{D}_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x \leq \sqrt{g_a\left(\frac{y}{x}\right)} \right\}.$$

1. Calculer $\sup_{z>0} g_a(z)$ et $\sup_{z>0} z^2 g_a(z)$. En déduire que $\mathcal{D}_a \subset [0, x_a] \times [0, y_a]$, où $x_a = \left(\frac{a-1}{e}\right)^{\frac{a-1}{2}}$ et $y_a = \left(\frac{a+1}{e}\right)^{\frac{a+1}{2}}$.
2. Soit $(X, Y) \sim \mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ un couple uniformément distribué sur $\mathcal{D}_a$, i.e. (X, Y) possède la densité $\frac{1}{|\mathcal{D}_a|} \, \mathbb{1}_{\{0 \leq y\}} \, \mathbb{1}_{\{0 \leq x \leq \sqrt{g_a(\frac{y}{x})}\}}$, où $|\mathcal{D}_a|$ désigne la surface de $\mathcal{D}_a$. Quelle est la loi de $W = \frac{Y}{X}$? En déduire que $|\mathcal{D}_a| = \frac{\Gamma(a)}{2}$. Conclure que $Z = \frac{W}{\lambda} \sim \Gamma(a, \lambda)$.
3. Comment simuler suivant les lois $\mathcal{U}(\mathcal{D}_a)$ et $\Gamma(a, \lambda)$?
4. On vient de voir que pour simuler suivant la loi $\Gamma(a, 1)$, il n'y a pas besoin de connaître la constante $\Gamma(a)$ qui permet de normaliser g_a pour obtenir la densité $f_{\Gamma(a,1)}$. Est-ce que remplacer g_a par cg_a où $c > 0$ dans la méthode ci-dessus change son efficacité ?

Exercice 9 (Borne de Letac pour la méthode du rejet). Soit p une densité de probabilité sur l'intervalle $[0, 1]$ suivant laquelle on souhaite simuler en utilisant un algorithme de rejet construit à l'aide d'une suite $((U_i, X_i))_{i \geq 1}$ de vecteurs aléatoires i.i.d. où les U_i sont uniformément réparties sur $[0, 1]$. Plus précisément, on suppose qu'il existe un ensemble d'acceptation $\mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}((U_1, X_1) \in \mathcal{A}) > 0$ et que la loi conditionnelle de U_1 sachant $(U_1, X_1) \in \mathcal{A}$ possède la densité p. On note $N = \min\{i \geq 1 : (U_i, X_i) \in \mathcal{A}\}$ et B un sous-ensemble borélien de $[0, 1]$.

1. Quelle est la loi de N ? Et celle de U_N ?
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(U_n \in B, N \geq n) = \mathbb{P}(U_n \in B)\mathbb{P}(N \geq n)$.
3. En déduire que $\mathbb{P}(U_N \in B) \leq \mathbb{P}(U_1 \in B)\mathbb{E}(N)$.
4. Conclure que $\mathbb{E}(N) \geq \sup\{\rho \geq 0 : \int_0^1 \mathbb{1}_{\{p(u) \geq \rho\}} \, \mathrm{d}u > 0\}$.

Exercice 10. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes gaussiennes centrées réduites. Déterminer la loi de

$$\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \right) \qquad \text{et} \qquad \frac{X}{Y}.$$

Solution. Comme X et Y sont indépendantes, la loi de (X, Y) a une densité $\frac{1}{2\pi} \, \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On applique la méthode de la fonction muette en calculant $\mathbb{E}g\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\right)$:

$$\mathbb{E}\left[g\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \right) \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Or $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto (\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est un C^1-difféormorphisme de jacobien 1. Le changement de variable $u = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ et $v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ donne $x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}$ et $y = \frac{u-v}{\sqrt{2}}$, de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[g\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}} \right) \right] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) \, \mathrm{e}^{-\frac{(u+v)^2+(u-v)^2}{4}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u, v) \, \mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v. \end{aligned}$$

On en déduit que $(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}})$ est à densité, de densité donnée par $(u, v) \mapsto \frac{1}{2\pi} \, \mathrm{e}^{-\frac{u^2+v^2}{2}}$. Ainsi, $(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}, \frac{X-Y}{\sqrt{2}})$ a la même loi qu'un couple de deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes.

Comme X et Y sont indépendantes, la loi de (X,Y) a une densité $\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ sur $\mathbb{R}^2$. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue bornée. On applique la méthode de la fonction muette en calculant $\mathbb{E}\left[g(X/Y)\right]$:

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Or $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\mapsto(x/y,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un C^1-difféormorphisme de jacobien y^{-1}. En faisant le changement de variable $u=x/y$ et $v=y$, de sorte que $x=uv$ et $y=v$, on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\mathbb{R}^2} g\left(\frac{x}{y}\right)|y|\;\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)}\,|y|^{-1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}^2} g\left(u\right)|v|\;\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\,du\,dv\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(u)\left(\int_{\mathbb{R}}|v|\;\mathrm{e}^{-\frac{v^2}{2}(u^2+1)}\,dv\right)du\\ &= 2\int_{\mathbb{R}} g(u)\frac{1}{u^2+1}\,du.\end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{E}\left(g\left(\frac{X}{Y}\right)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} g(u)\frac{1}{u^2+1}\,du,$$

ce qui signifie que la loi de X/Y est la loi de Cauchy, c'est-à-dire la loi de densité $(\pi(1+x^2))^{-1}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le but de l'exercice est de mettre en oeuvre la méthode de la fonction muette et de s'exercer à l'application du théorème de changement de variables (ici dans $\mathbb{R}^2$). On peut cependant remarquer que les deux questions peuvent se résoudre plus simplement. On voit en effet que

$$\begin{pmatrix}\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\\ \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\quad\text{où } A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

est une matrice orthogonale (i.e. $AA^\top=I_d$). On peut alors invoquer la propriété d'invariance par rotation des vecteurs Gaussiens et conclure que

$$A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}\ \text{a la même loi que}\ \begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$$

ou bien, utiliser que $A\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}$ est une transformation linéaire d'un vecteur Gaussien, c'est donc aussi un vecteur Gaussien. Il suffit alors de déterminer sa moyenne et se covariance pour le déterminer entièrement. Ici il est de moyenne nulle et comme A est orthogonale, il a I_d pour matrice de covariance. On retrouve dans les deux cas que

$$\begin{pmatrix}\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\\ \frac{X-Y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\sim\mathcal{N}(0,I_d).$$

Pour la deuxième question, on peut d'abord intégrer par rapport à x puis faire le changement de variable (unidimensionel) $u=x/y$ puis conclure.