PC 6 : Convergences & Loi des grands nombres

On corrigera les exercices (1), (3), (6) et (4) en PC.

1 Différentes notions de convergence

Exercice 1 (Convergence d'une suite de v.a. de Bernoulli)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi Bernoulli, $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ avec $p_n \to 0$.

1. Montrer que $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} 0$ et $X_n \overset{\mathrm{L}^1}{\to} 0$.
2. On suppose que $\sum_n p_n < \infty$. Montrer que $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$.
3. On suppose que $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$. Montrer qu'on n'a pas nécessairement $\sum_n p_n < \infty$. *On pourra considérer des variables aléatoires de la forme $X_n = f_n(U)$ avec U uniforme.*
4. On suppose maintenant que $\sum_n p_n = \infty$ et que les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Montrer que p.s. $X_n \not\to 0$ (autrement dit, que $\mathbb{P}(X_n \not\to 0) = 1$).

Solution.

1. On a $\mathbb{E}(|X_n|) = \mathbb{E}(X_n) = p_n \to 0$, donc $X_n \to 0$ dans L^1 et donc en probabilité (convergence L^1 implique convergence $\mathbb{P}$).
2. D'après le premier lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\overline{\lim}_n\{X_n = 1\}) = 0$. Autrement dit, $X_n = 0$ à partir d'un certain rang avec probabilité 1, donc $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$.
3. On peut considérer $X_n = \mathbb{1}_{[0,1/n]}(U)$ avec U de loi uniforme sur $[0,1]$. $X_n(\omega) \to 0$ pour tout $\omega \in U^{-1}(]0,1])$ et $\mathbb{P}(U^{-1}(]0,1])) = 1$, donc $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$. D'autre part, $X_n \sim \mathcal{B}(1/n)$ et $\sum_n 1/n$ diverge.
4. D'après le second lemme de Borel-Cantelli, $\mathbb{P}(\overline{\lim}_n\{X_n = 1\}) = 1$. Autrement dit, $X_n = 1$ pour une infinité de valeurs de n avec probabilité 1, donc p.s. $X_n \not\to 0$.

Exercice 2 (Convergence d'une suite de v.a. exponentielles)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle, $X_n \sim \mathcal{E}(n)$. Montrer que $X_n \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$. *On pourra étudier $\mathbb{P}(X_n > t_n)$ pour une suite t_n tendant vers 0 bien choisie.*

Exercice 3 (Autour des convergences $\mathbb{P}$ et p.s.)**.** Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles, et Z et Z' deux variables aléatoires réelles.

1. On suppose que :
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Z \text{ et } X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Z'.$$
Montrer que $Z \overset{\text{p.s.}}{=} Z'$. Autrement dit, la limite en probabilité est unique presque surement. *On pourra commencer par montrer que $\mathbb{P}(|Z - Z'| > \varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$.*
2. On suppose que $Z \overset{\text{p.s.}}{=} Z'$. Montrer que
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} Z \iff X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} Z'.$$
3. On suppose que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante. Montrer que :
$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} Z \implies X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} Z.$$
On pourra montrer que $(X_n)_n$ est bornée presque surement.

4. On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite i.i.d. et on pose

$$m := \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) < 1\},$$

avec F_X la fonction de répartition de X_1. On suppose que $m < +\infty$. On pose pour tout $n \geq 1$,

$$M_n := \max_{1\leq i\leq n} X_i.$$

Montrer que

$$M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} m.$$

Solution.

1. On va montrer que $\mathbb{P}(|Z - Z'| > \varepsilon) = 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\{|Z - Z'| > \varepsilon\} \subset \{|X_n - Z| > \varepsilon/2\} \cup \{|X_n - Z'| > \varepsilon/2\},$$

et donc

$$\mathbb{P}\left(|Z - Z'| > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(|X_n - Z| > \varepsilon/2\right) + \mathbb{P}\left(|X_n - Z'| > \varepsilon/2\right)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on en déduit que $\mathbb{P}(|Z - Z'| > \varepsilon) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$. On peut ensuite conclure, par exemple en écrivant

$$\{Z \neq Z'\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left\{|Z - Z'| > \frac{1}{n}\right\},$$

ce qui implique $\mathbb{P}(Z \neq Z') = 0$, autrement dit $Z = Z'$ p.s.

2. Par hypothèse $\mathbb{P}(Z = Z') = 1$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\{X_n \to Z\}) &= \mathbb{P}(\{X_n \to Z\} \cap \{Z = Z'\})\\ &= \mathbb{P}(\{X_n \to Z'\} \cap \{Z = Z'\})\\ &= \mathbb{P}(\{X_n \to Z'\}).\end{aligned}$$

En particulier, $\mathbb{P}(\{X_n \to Z\}) = 1$ ssi $\mathbb{P}(\{X_n \to Z'\}) = 1$.

3. $(X_n)_n$ étant croissante, $(X_n(\omega))_n$ admet une limite $Z'(\omega) \in]-\infty, +\infty]$ pour tout $\omega \in \Omega$, et il suffit de montrer que $Z' < +\infty$ p.s.. En effet, on pourra alors utiliser le fait que convergence p.s. implique convergence en probabilité et la question 1), pour conclure que $Z' = Z$. On va montrer que X_n est bornée p.s. par $Z + 1$ (on pourrait presque aussi facilement montrer que X_n est bornée par Z p.s.). Supposons par l'absurde qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\mathbb{P}(X_{n_0} > Z + 1) > 0$$

Par croissance de (X_n) on aurait alors

$$\mathbb{P}(X_n > Z + 1) \geq \mathbb{P}(X_{n_0} > Z + 1) > 0 \qquad \forall\, n \geq n_0,$$

ce qui est en contradiction avec $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Z$. On a donc

$$\mathbb{P}(X_n \leq Z + 1) = 1 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui implique $Z' \leq Z + 1$ p.s. et achève la démonstration.

4. $(M_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante, par la question précédente il suffit donc de montrer que $(M_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers m. F_X étant continue à droite, on a $F_X(m) = 1$ et on en déduit $X_n \leq m$ p.s. pour tout n, et donc $M_n \leq m$ p.s.. Finalement,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(|M_n - m| > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(m - M_n > \varepsilon\right)\\ &= \mathbb{P}\left(M_n < m - \varepsilon\right)\\ &= \left(F_X(m - \varepsilon)\right)^n.\end{aligned}$$

Comme $F_X(m - \varepsilon) < 1$ et on obtient bien la convergence en probabilité de M_n vers m.

Exercice 4 (Lemme de Scheffé)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires positives, intégrables, convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire X intégrable et telle que $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$. Montrer que $X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Solution. Il s'agit de montrer que $\mathbb{E}[|X_n - X|] \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. On remarque que

$$|X_n - X| = \max(X_n, X) - \min(X_n, X).$$

On sait que $X_n \to X$ presque sûrement (et donc $\min(X_n, X) \to X$ presque sûrement) et $0 \leq \min(X_n, X) \leq X$. Comme X est intégrable, le théorème de convergence dominée entraîne que $\mathbb{E}[\min(X_n, X)] \to \mathbb{E}[X]$. Par ailleurs,

$$X_n + X = \max(X_n, X) + \min(X_n, X)$$

et donc en passant à l'espérance

$$\mathbb{E}[\max(X_n, X)] = \mathbb{E}[X_n] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\min(X_n, X)] \to \mathbb{E}[X].$$

Finalement, $\mathbb{E}[|X_n - X|] = \mathbb{E}[\max(X_n, X)] - \mathbb{E}[\min(X_n, X)] \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 5 (Modes de convergence)**.**

1. Montrer qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge presque sûrement vers une variable aléatoire X si et seulement si $M_n = \sup_{k\geq n} |X_k - X|$ converge vers 0 en probabilité.
2. Montrer qu'une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires converge en probabilité vers 0 si et seulement si $\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right] \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. *On pourra commencer par écrire*

$$\mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\mathbf{1}_{|X_n|\leq\varepsilon}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\mathbf{1}_{|X_n|>\varepsilon}\right].$$

2 Loi des grands nombres

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $\lambda > 0$. Déterminer

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On pourra considérer dans chaque cas des variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ i.i.d. et de loi bien choisie, et étudier la convergence de f appliquée à la moyenne empirique.

Solution. On commence par considérer X_i i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$, et on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On a alors

$$\int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) dx_1 \cdots dx_n = \mathbb{E}(f(S_n/n)).$$

Par la loi forte des grands nombres, S_n/n converge vers $\mathbb{E}[X_1] = 1/2$ presque sûrement. Comme la fonction f est supposée continue sur $\mathbb{R}$ on a $f(S_n/n) \to f(1/2)$ presque sûrement. La fonction f étant par ailleurs bornée, on a $|f(S_n/n)| \leq \|f\|_\infty$. Le théorème de convergence dominée entraîne donc que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[f(S_n/n)] = f(1/2)$.
Pour la deuxième limite, on prend X_i i.i.d. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on note toujours $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On montre que S_n suit alors une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}[f(S_n/n)].$$

On conclut comme précédemment que $\mathbb{E}[f(S_n/n)] \to f(\mathbb{E}[X_1]) = f(\lambda)$.

Exercice 7 (Marche aléatoire simple sur $\mathbb{R}$)**.** On considère une particule se déplaçant sur l'axe réel, et on note X_n sa position à l'instant $n \in \mathbb{N}$. On suppose que X_0 est une v.a. réelle et que la position de la particule évolue de la manière suivante :

$$X_{n+1} = X_n + \varepsilon_{n+1} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a.r. i.i.d., intégrables et de moyenne $m \neq 0$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} |X_n| = +\infty$ presque sûrement.

Exercice 8 (Biais par la taille)**.** On considère une population comportant un grand nombre n de foyers. On modélise la taille de ces foyers par une suite de v.a. i.i.d. $X_1, \dots, X_n$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, intégrables et de moyenne m. On note $p_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Soit T la taille du foyer d'un individu pris au hasard dans la population. Montrer que $\mathbb{P}(T = k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{k}{m} p_k$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. *On pourra commencer par étudier $\mathbb{P}(T = k | X_1, \dots, X_n)$ puis utiliser des propriétés de l'espérance conditionnelle vues en cours (on admettra que ces propriétés se généralisent au cas où on conditionne par plus d'une variable).*

Exercice 9 (Produit de variables aléatoires)**.** Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi à valeurs dans $\{a, b\}$ avec $0 < a < 1 < b$ et telles que $\mathbb{E}[X_1] = 1$. On pose $Y_n = \prod_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$. Montrer que $Y_n \overset{\text{p.s.}}{\to} 0$. La convergence a-t-elle lieu en moyenne ? La variable $Y = \sup_{n\geq 1} Y_n$ est-elle intégrable ?

Exercice 10 (Une preuve de la loi faible des grands nombres)**.** Dans cet exercice, on présente une preuve rapide de la loi forte des grands nombres sous une hypothèse de moment d'ordre 4 fini. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$ et $\mathbb{E}(X_1) = 0$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$
$$\mathbb{E}[S_n^4] \leq n(3n-2)\mathbb{E}[X_1^4].$$
On pourra développer $\mathbb{E}[S_n^4]$, remarquer que "la plupart" des termes sont nuls par indépendance, et compter ceux qui restent.
2. En déduire que $\sum_{n=1}^\infty \frac{S_n^4}{n^4}$ est intégrable, puis que $\frac{S_n}{n} \to 0$ presque sûrement.