Conditions suffisantes de qualification d'une contrainte en un point

Guillaume Lecué[1]

Pour pouvoir appliquer le théorème de KKT, on a besoin de supposer que la contrainte K est qualifiée en un point. Cependant, vérifier directement l'hypothèse de qualification est en général difficile. On a alors recours à des conditions suffisantes impliquant la qualification. On en a déjà vu deux dans les cours précédents (condition de Mangasarian-Fromovitz et la condition QC-A). Ici on montre que ces deux conditions sont bien suffisantes. On introduit aussi d'autres conditions qui elles aussi implique la qualification.

1 Introduction

But : Dans cette section, on rappelle quelques définitions et les enjeux liés à la qualification de contraintes.

Comme vu au chapitre précédent, on construit une approximation locale linéaire de l'ensemble K en un de ses points par la notion de cône tangent.

Définition 1.1 *Soit K un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ non vide. Soit $x \in K$. Le **cône tangent à** K **en** x est défini par*

$$T_K(x) = \left\{ v : \exists (\lambda_k)_k \subset \mathbb{R}_+^*, (v_k)_k \subset \mathbb{R}^n \text{ telles que } (\lambda_k)_k \downarrow 0, x + \lambda_k v_k \in K \text{ et } v = \lim_k v_k \right\}$$

Dans le cadre de ce cours, on s'intéresse aux cônes tangents d'ensemble de contraintes K ayant la forme suivante : étant donné un ouvert U de $\mathbb{R}^n$, on considère un ensemble de contraintes K de la forme

$$K = \left\{ x \in U : \begin{array}{c} g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0 \\ h_1(x) \leq 0, \ldots, h_l(x) \leq 0 \end{array} \right\} \tag{1.1}$$

pour $g_1, \ldots, g_r : U \to \mathbb{R}$ définissant les contraintes d'égalité et $h_1, \ldots, h_l : U \to \mathbb{R}$ définissant les contraintes d'inégalité.

On s'intéresse dans cette section à décrire le cône tangent à K en un point $x \in K$. On rappelle la proposition suivante.

Proposition 1.2 *On considère K comme dans (1.1). On suppose que $g_1, \ldots, g_r, h_1, \ldots, h_l$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $x \in K$. On note $J(x) = \{j \in \{1, \ldots, l\} : h_j(x) = 0\}$. On a*

$$T_K(x) \subset \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \left\langle \nabla g_i(x), v \right\rangle = 0, \forall i = 1, \ldots, r \\ \left\langle \nabla h_j(x), v \right\rangle \leq 0, \forall j \in J(x) \end{array} \right\}.$$

La réciproque n'étant pas vraie en générale, on va devoir supposer qu'elle l'est pour pouvoir décrire $T_K(x)$ simplement. C'est le but de l'hypothèse de qualification qu'on rappelle maintenant.

1. CREST, ENSAE. Bureau 3029, 5 avenue Henry Le Chatelier. 91 120 Palaiseau. Email : guillaume.lecue@ensae.fr.

Définition 1.3 *Soit K une contrainte définie comme dans (1.1) et $x \in K$. On suppose que $g_1, \dots, g_r, h_1, \dots, h_l$ sont de classe $\mathcal{C}^1$. On dit que K* ***est qualifiée en*** *x quand*

$$T_K(x) = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, r \\ \langle \nabla h_j(x), v \rangle \leq 0, \forall j \in J(x) \end{array} \right\}.$$

On dit qu'une contrainte K est ***qualifiée*** *quand K est qualifiée en chacun de ses points.*

La contrainte de qualification revient donc à supposer que l'inclusion réciproque dans la Proposition 1.2 est vraie.

L'hypothèse de qualification de K est une propriété des fonctions $(g_i)_i$ et $(h_j)_j$ et non de K en tant que sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On peut par exemple trouver des exemples où K se décrit par deux systèmes de fonctions $(g_i)_i$ et $(h_j)_j$ et $(g_i')_i$ et $(h_j')_j$ pour lesquels K peut être qualifiée pour le premier système mais pas pour le deuxième.

En pratique, l'hypothèse de qualification est très difficile à vérifier. Cependant, on peut donner des conditions suffisantes qui impose la qualification. C'est l'objectif des sections suivantes de présenter de telles conditions et de prouver qu'elles sont bien suffisante pour la qualification.

2 Contraintes affines ou localement affines (QC-A)

On commence avec un cas "facile" quand les fonctions $(g_i)_i$ et $(h_j)_j$ sont affines. Dans ce cas, l'approximation de la contrainte K par son cône tangent est exacte (localement) en tout point de K et on a directement la qualification en tout point de K.

Proposition 2.1 *On suppose que les fonctions $(g_i)_{i=1}^r$ et $(h_j)_{j=1}^l$ définissant la contrainte K sont affines. Alors K est qualifiée.*

Preuve. Soit $x \in K$. D'après la Proposition 1.2, on sait déjà que

$$T_K(x) \subset \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, r \\ \langle \nabla h_j(x), v \rangle \leq 0, \forall j \in J(x) \end{array} \right\}.$$

Il reste donc à montrer l'inclusion inverse. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $\langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, r$ et $\langle \nabla h_j(x), v \rangle \leq 0, \forall j \in J(x)$. Montrons que $v \in T_K(x)$.

Comme les fonctions $(g_i)_i$ et $(h_j)_j$ sont affines, on a pour tout $i = 1, \dots, r$, $j \in J(x)$ et $\lambda \geq 0$ tel que $x + \lambda v \in U$,

$$g_i(x + \lambda v) = g_i(x) + \langle \nabla g_i(x), \lambda v \rangle \text{ et } h_j(x + \lambda v) = h_j(x) + \langle \nabla h_j(x), \lambda v \rangle \tag{2.1}$$

de plus $g_i(x) = 0$ et $h_j(x) = 0$ et $\langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0$, $\langle \nabla h_j(x), v \rangle \leq 0$, donc

$$g_i(x + \lambda v) = 0 \text{ et } h_j(x + \lambda v) \leq 0.$$

Par ailleurs, pour tout $j \notin J(x)$, on a $h_j(x) < 0$ alors par continuité, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, $j \notin J(x)$, $h_j(x + \lambda v) < 0$. Ainsi pour tout $0 \leq \lambda \leq \lambda_0$, $i \in \{1, \dots, r\}$ et $j \in \{1, \dots, l\}$, $g_i(x + \lambda v) = 0$ et $h_j(x + \lambda v) \leq 0$. Donc $x + \lambda v \in K$.

On définit $\lambda_k = \lambda/(k + 1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On a donc $x + \lambda_k v \in K$ pour tout k et $(\lambda_k)_k \downarrow 0$. Alors $v \in T_K(x)$. ∎

En fait, on peut extraire de la preuve ci-dessus une condition plus générale que celle imposant l'affinité des fonctions $(g_i)_i$ et $(h_j)_j$ sur tout l'espace. C'est la condition QC-A déjà rencontrée qu'on rappelle maintenant.

Définition 2.2 *On dit que la contrainte K définie en (1.1) satisfait la* ***condition QC-A*** *en un point $a \in K$ quand :*
i) $(g_i)_{i=1}^r$ et $(h_j)_{j \in J(a)}$ sont affines dans un voisinage de a,
ii) $(h_j)_{j \notin J(a)}$ sont continues en a
où on rappelle que $J(a) = \{j \in \{1, \dots, l\} : h_j(a) = 0\}$.

La condition QC-A est suffisante pour assurer la qualification en un point.

Proposition 2.3 *Soit K la contrainte définie en (1.1). Soit $a \in K$. On suppose que K satisfait la condition QC-A en a. Alors K est qualifiée en a.*

Preuve. La preuve de cette proposition est quasi-identique à celle de la Proposition 2.1 sauf que (2.1) est vraie seulement localement càd pour tout $0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ pour un certain $\lambda_1 > 0$. Le reste est identique. ■

3 L'hypothèse de qualification dans le théorème des extrema liés

Dans cette section, on considère le cadre défini dans le théorème des extrema liés. Dans ce théorème, la contrainte est uniquement définie à partir de contraintes d'égalité :

$$K = \{x \in U : g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\} \tag{3.1}$$

où $g_1, \dots, g_r : U \to \mathbb{R}$ sont de classes $\mathcal{C}^1$ et U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour ce théorème, la contrainte de qualification en un point $x \in K$ est la suivante : “la famille $(\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_r(x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$”. L'objectif du résultat suivant est de montrer que cette condition est bien suffisante pour assurer la qualification de K en x.

Proposition 3.1 *On considère une contrainte de la forme (3.1). Soit $x \in K$. On suppose que la famille $(\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_r(x))$ est une famille libre de $\mathbb{R}^n$. Alors la contrainte K est qualifiée en x.*

Preuve. Grâce à la Proposition 1.2, il suffit de montrer que

$$\big\{v \in \mathbb{R}^n : \big\langle \nabla g_i(x), v \big\rangle = 0, \forall i = 1, \dots, r\big\} \subset T_K(x).$$

Soit $v \in \mathrm{vect}(\nabla g_1(x), \dots, \nabla g_r(x))^\perp$. On veut montrer que $v \in T_K(x)$. Pour cela, on commence par montrer deux lemmes.

Lemme 3.2 *Il existe un voisinage ouvert $U' \subset U$ de x et $\alpha > 0$ tels que pour tout $x' \in U'$ et $y \in \mathbb{R}^r$ tel que $\|y\|_2 = 1$, on a*

$$\left\| \sum_{i=1}^r y_i \nabla g_i(x') \right\|_2 \geq \alpha.$$

Preuve. On raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_n \subset U$ convergente vers x et $(y^{(n)})_n \subset S_2^{r-1}$ (la sphère Euclidienne de $\mathbb{R}^r$) telles que

$$\lim_n \left\| \sum_{i=1}^r y_i^{(n)} \nabla g_i(x_n) \right\|_2 = 0.$$

Comme S_2^{r-1} est compact, on peut extraire une sous-suite convergente de $(y^{(n)})_n$: $(y^{(\varphi_n)})_n \to y \in S_2^{r-1}$ quand n tends vers l'infini. En passant, à la limite, on a

$$\left\| \sum_{i=1}^r y_i \nabla g_i(x) \right\|_2 = 0.$$

Or la famille $(\nabla g_i(x))_{i=1}^r$ est libre, ce n'est donc pas possible. ■

Lemme 3.3 *Soit* $v \in \mathrm{vect}(\nabla g_1(x), \ldots, \nabla g_r(x))^\perp$. *Pour tout* $h > 0$, *on pose*

$$\theta_h = \left(\sum_{i=1}^r g_i(x + hv)^2 \right)^{1/2}.$$

On a $\theta_h / h \to 0$ *quand* $h \to 0^+$.

Preuve. Comme g_i est différentiable en x, on a quand $h \to 0^+$,

$$g_i(x + hv) = g_i(x) + \langle \nabla g_i(x), hv \rangle + o(\|hv\|_2)$$

et comme $g_i(x) = 0$ et $\langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0$, on a quand $h \to 0^+$

$$\sum_{i=1}^r \frac{g_i(x + hv)^2}{h^2} = \sum_{i=1}^r o(1)^2 = o(1).$$

On a donc bien $\theta_h / h \to 0$ quand $h \to 0^+$. ■

On passe à la preuve du résultat de la Proposition 3.1. Soit $v \in \mathrm{vect}(\nabla g_1(x), \ldots, \nabla g_r(x))^\perp$. Montrons que $v \in T_K(x)$. Pour tout $h_0 \geq h > 0$, on considère la fonction

$$\phi_h : w \in B_2(0, \epsilon) \to \left(\sum_{i=1}^r h_j(x + hv + w)^2 \right)^{1/2} + \frac{\|w\|_2}{2h}$$

où h_0 et $\epsilon > 0$ sont tels que $x + hv + w \in U$ (ils existent vu que U est ouvert).

Quitte à prendre h_0 suffisamment petit, on peut supposer que $(2h\theta_h)^{1/2} < \epsilon$ (car $\theta_h = o(h)$ quand $h \to 0$ d'après le Lemme 3.3). On a $\phi_h(0) = \theta_h$ et pour tout $w \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|w\|_2 = (2h\theta_h)^{1/2}$, on a $\phi_h(w) \geq \theta_h$. Par continuité de ϕ_h, elle atteint son minimum sur l'ensemble compact $\{w : \|w\|_2 \leq (2h\theta_h)^{1/2}\}$ et comme au bord $\phi_h(w) \geq \theta_h$ et $\phi_h(0) = \theta_h$, ce minimum w_h peut être pris dans la boule ouverte $\{w : \|w\|_2 < (2h\theta_h)^{1/2}\}$.

Supposons qu'il existe une suite $(h_k)_k \to 0^+$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{i=1}^r g_i(x + h_k v + w_{h_k})^2 \right)^{1/2} = 0. \tag{3.2}$$

Ainsi, pour $v_k = v + w_{h_k}/h_k$ on a $x + h_k v_k \in K$. De plus, $v_k \to v$ quand $k \to \infty$ car $\|w_{h_k}/h_k\| \leq (2h_k\theta_{h_k})^{1/2}/h_k \to 0$ d'après le Lemme 3.3. Donc $v \in T_K(x)$.

Il reste donc à construire un suite $(h_k)_k$ telle que (3.2) est vraie. On raisonne par l'absurde pour démontrer ce résultat. On suppose donc que pour tout h assez petit, on a

$$\left(\sum_{i=1}^{r} g_i(x + hv + w_h)^2\right)^{1/2} > 0.$$

On écrit la condition d'optimalité satisfaite par w_h :

$$\frac{\sum_{i=1}^{r} g_i(x + hv + w_h)\nabla g_i(x + hv + w_h)}{\left(\sum_{i=1}^{r} g_i(x + hv + w_h)^2\right)^{1/2}} + \frac{w_h}{h} = 0.$$

On pose pour tout $i = 1, \ldots, r$,

$$y_i^h = \frac{g_i(x + hv + w_h)}{\left(\sum_{i=1}^{r} g_i(x + hv + w_h)^2\right)^{1/2}}.$$

Alors $y = (y_i^h)_{i=1}^r$ est un vecteur tel que $\|y\|_2 = 1$. Alors d'après le Lemme 3.2, on a

$$\frac{\|w_h\|_2}{h} = \left\|\sum_{i=1}^{r} y_i^h \nabla g_i(x + hv + w_h)\right\|_2 \geq \alpha.$$

Or $\|w_h\|_2 \, h \leq (2h\theta_h)^{1/2}/h \to 0$ quand $h \to 0^+$. On obtient ainsi une contradiction. ■

4 Condition de Mangasarian-Fromovitz

On a déjà rencontré cette condition dans les chapitres précédents. Le but de cette section est de démontrer que la condition de Mangasarian-Fromovitz est bien suffisante pour la qualification. On se place dans la cadre général : U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K est une contrainte de la forme

$$K = \left\{ x \in U : \begin{array}{c} g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0 \\ h_1(x) \leq 0, \ldots, h_l(x) \leq 0 \end{array} \right\} \tag{4.1}$$

pour $g_1, \ldots, g_r : U \to \mathbb{R}$ définissant les contraintes d'égalité et $h_1, \ldots, h_l : U \to \mathbb{R}$ définissant les contraintes d'inégalité. On rappelle la condition de Mangasarian-Fromovitz.

Définition 4.1 *On dit que la contrainte K définie en (4.1) satisfait la* ***condition de Mangasarian-Fromovitz*** *en un point $x \in K$ quand :*

i) la famille $(\nabla g_1(x), \ldots, \nabla g_r(x))$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

ii) On note $J(x) = \{j \in \{1, \ldots, l\} : h_j(x) = 0\}$. Si $J(x) \neq \emptyset$ alors il existe un $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que 1) $\langle \nabla g_i(x), \bar{v} \rangle = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ et 2) $\langle \nabla h_j(x), \bar{v} \rangle < 0$ pour tout $j \in J(x)$.

Le résultat suivant dit que la condition de Mangasarian-Fromovitz en $x \in K$ implique la qualification de K en x. On montre ce résultat ensuite.

Proposition 4.2 *Soit K la contrainte définie en (4.1). Soit $x \in K$. On suppose que K satisfait la condition de Mangasarian-Fromovitz en x. Alors K est qualifiée en x.*

Preuve. D'après la Proposition 1.2, on sait déjà que

$$T_K(x) \subset \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, r \\ \langle \nabla h_j(x), v \rangle \leq 0, \forall j \in J(x) \end{array} \right\}.$$

Il reste donc à montrer l'inclusion inverse. On montre d'abord que

$$C := \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, r \\ \langle \nabla h_j(x), v \rangle < 0, \forall j \in J(x) \end{array} \right\} \subset T_K(x)$$

(où on a une inégalité stricte "$\langle \nabla h_j(x), v \rangle < 0$" définissant C). On introduit aussi la "sous-containte" $\tilde{K}$ faite uniquement des contraintes d'égalités :

$$\tilde{K} = \{x \in U : g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0\}.$$

D'après l'hypothèse *i)* et la Proposition 3.1, on sait que $\tilde{K}$ est qualifiée en x. Par conséquent, pour tout $v \in C$, il existe une suite $(\lambda_k)_k \downarrow 0$ et $(v_k)_k$ telles que $v_k \to v$ et $x + \lambda_k v_k \in \tilde{K}$. Montrons qu'en fait, pour k assez grand, on a $x + \lambda_k v_k \in K$.

Soit $j \in J(x)$. On a $h_j(x) = 0$ et $\langle \nabla h_j(x), v \rangle < 0$. Alors, quand $k \to \infty$,

$$\begin{aligned} h_i(x + \lambda_k v_k) &= h_j(x) + \langle \nabla h_j(x), \lambda_k v_k \rangle + o(\|\lambda_k v_k\|_2) \\ &= \lambda_k \left(\langle \nabla h_j(x), v_k \rangle + o(1) \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\langle \nabla h_j(x), v_k \rangle \to \langle \nabla h_j(x), v \rangle < 0$ et $o(1) \to 0$ quand $k \to 0$ alors, il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_i$, $h_i(x + \lambda_k v_k) < 0$.

Soit $j \notin J(x)$. Alors $h_j(x) < 0$ et comme $(\lambda_k v_k)_k$ tends vers 0 quand $k \to \infty$, il existe un $k_j \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_j, h_j(x + \lambda_k v_k) < 0$. En notant, $\bar{k} = \max_{1 \leq j \leq l} k_j$, on a bien pour tout $k \geq \bar{k}$, $x + \lambda_k v_k \in K$ et donc $v \in T_K(x)$.

Pour conclure, on a montré que $C \subset T_K(x)$. Comme $T_K(x)$ est fermé, on a aussi $\bar{C} \subset T_K(x)$. Il suffit maintenant de montrer que

$$\bar{C} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, r \\ \langle \nabla h_j(x), v \rangle \leq 0, \forall j \in J(x) \end{array} \right\}.$$

L'inclusion "$\subset$" est évidente par continuité du produit scalaire. Il reste donc à montrer que si $v \in \mathbb{R}^n$ est tel que

$$\langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, r \text{ et } \langle \nabla h_j(x), v \rangle \leq 0, \forall j \in J(x)$$

alors $v \in \bar{C}$. On note $v_k = v + \bar{v}/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ où $\bar{v}$ est le vecteur de la condition *ii)* de Mangasarian-Fromovitz. On a pour tout $i = 1, \dots, r$,

$$\langle \nabla g_i(x), v_k \rangle = \langle \nabla g_i(x), v \rangle + \langle \nabla g_i(x), \bar{v}/k \rangle = 0$$

car $\langle \nabla g_i(x), v \rangle = 0$ et $\langle \nabla g_i(x), \bar{v} \rangle = 0$. De plus, pour tout $j \in J(x)$, on a

$$\langle \nabla h_i(x), v_k \rangle = \langle \nabla h_i(x), v \rangle + \langle \nabla h_i(x), \bar{v}/k \rangle < 0$$

car $\langle \nabla h_i(x), v \rangle$ et $\langle \nabla h_i(x), \bar{v} \rangle < 0$ par la condition *ii)*. En en déduit donc que $(v_k)_k$ est une suite d'éléments de C et comme $v_k \to v$, on a bien $v \in \bar{C}$. ■

5 Condition de Slater

La condition de Slater est utilisée pour les problèmes d'optimisation convexes et différentiables. On s'intéresse alors aux ensembles de contraintes K de la forme :

$$K = \left\{ x \in U : \begin{array}{c} g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0 \\ h_1(x) \leq 0, \ldots, h_l(x) \leq 0 \end{array} \right\} \tag{5.1}$$

où U est un convexe ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g_1, \ldots, g_r : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions affines et $h_1, \ldots, h_l : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions convexes différentiables.

Définition 5.1 *On dit que la contrainte K définie dans (5.1) satisfait la **condition de Slater** quand il existe $x_0 \in K$ tel que $h_j(x_0) < 0$ pour tout $j = 1, \ldots, l$.*

Proposition 5.2 *Soit K une contrainte de la forme (5.1) où $g_1, \ldots, g_r : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions affines et $h_1, \ldots, h_l : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et convexes. Si la condition de Slater est satisfaite alors la contrainte K est qualifiée.*

Preuve. Soit $x \in K$. Montrons que K est qualifiée en x.

D'après la Proposition 1.2, il suffit de montrer que

$$\left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \left\langle \nabla g_i(x), v \right\rangle = 0, \forall i = 1, \ldots, r \\ \left\langle \nabla h_j(x), v \right\rangle \leq 0, \forall j \in J(x) \end{array} \right\} \subset T_K(x).$$

On reprends des éléments de la preuve de la Proposition 4.2. On montre d'abord que

$$C := \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \left\langle \nabla g_i(x), v \right\rangle = 0, \forall i = 1, \ldots, r \\ \left\langle \nabla h_j(x), v \right\rangle < 0, \forall j \in J(x) \end{array} \right\} \subset T_K(x)$$

(où on a une inégalité stricte "$\left\langle \nabla h_j(x), v \right\rangle < 0$" définissant C). On introduit la "sous-containte" $\tilde{K}$ faite uniquement des contraintes égalités :

$$\tilde{K} = \left\{ x \in U : g_1(x) = \cdots = g_r(x) = 0 \right\}.$$

D'après la Proposition 2.1, on sait que $\tilde{K}$ est qualifiée en x. Par conséquent, pour tout $v \in C$, il existe une suite $(\lambda_k)_k \downarrow 0$ et $(v_k)_k$ telles que $v_k \to v$ et $x + \lambda_k v_k \in \tilde{K}$. Montrons qu'en fait, pour k assez grand, on a $x + \lambda_k v_k \in K$. Soit $j \in J(x)$. On a $h_j(x) = 0$ et $\left\langle \nabla h_j(x), v \right\rangle < 0$. Alors, quand $k \to \infty$,

$$\begin{aligned} h_i(x + \lambda_k v_k) &= h_j(x) + \left\langle \nabla h_j(x), \lambda_k v_k \right\rangle + o(\|\lambda_k v_k\|_2) \\ &= \lambda_k \left(\left\langle \nabla h_j(x), v_k \right\rangle + o(1) \right). \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\left\langle \nabla h_j(x), v_k \right\rangle \to \left\langle \nabla h_j(x), v \right\rangle < 0$ et $o(1) \to 0$ quand $k \to 0$ alors, il existe $k_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_i$, $h_i(x + \lambda_k v_k) < 0$.

Soit $j \notin J(x)$. Alors $h_j(x) < 0$ et comme $(\lambda_k v_k)_k$ tends vers 0 quand $k \to \infty$, il existe un $k_j \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_j, h_j(x + \lambda_k v_k) < 0$. En notant, $\bar{k} = \max_{1 \leq j \leq l} k_j$, on a bien pour tout $k \geq \bar{k}$, $x + \lambda_k v_k \in K$ et donc $v \in T_K(x)$.

Pour conclure, on a montré que $C \subset T_K(x)$. Comme $T_K(x)$ est fermé, on a aussi $\bar{C} \subset T_K(x)$. Il suffit maintenant de montrer que

$$\bar{C} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{c} \left\langle \nabla g_i(x), v \right\rangle = 0, \forall i = 1, \ldots, r \\ \left\langle \nabla h_j(x), v \right\rangle \leq 0, \forall j \in J(x) \end{array} \right\}.$$

L'inclusion "$\subset$" est évidente par continuité du produit scalaire. Il reste donc à montrer que si $v \in \mathbb{R}^n$ est tel que

$$\left\langle \nabla g_i(x), v \right\rangle = 0, \forall i = 1, \ldots, r \text{ et } \left\langle \nabla h_j(x), v \right\rangle \leq 0, \forall j \in J(x)$$

alors $v \in \bar{C}$. On note $v_k = v + \bar{v}/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ où $\bar{v} = x - x_0$ et x_0 est le vecteur de la condition de Slater. Montrons que $v_k \in C$ pour tout k. On a pour tout $i = 1, \ldots, r$,

$$\left\langle \nabla g_i(x), v_k \right\rangle = \left\langle \nabla g_i(x), v \right\rangle + \left\langle \nabla g_i(x), \bar{v}/k \right\rangle = 0$$

car $\left\langle \nabla g_i(x), v \right\rangle = 0$ et $\left\langle \nabla g_i(x), \bar{v} \right\rangle = g_i(x) - g_i(x_0) = 0$ vu que g_i est affine et $x, x_0 \in K$. De plus, pour tout $j \in J(x)$, on a

$$0 > h_j(x_0) \geq h_j(x) + \left\langle \nabla h_j(x), x - x_0 \right\rangle = \left\langle \nabla h_j(x), \bar{v} \right\rangle$$

car h_j est convexe. Par ailleurs, $\left\langle \nabla h_j(x), v \right\rangle \leq 0$ alors $\left\langle \nabla h_j(x), v_k \right\rangle < 0$. On en déduit donc que $(v_k)_k$ est une suite d'éléments de C et comme $v_k \to v$, on a bien $v \in \bar{C}$. ∎