

# Statistiques mathématiques : cours 2

Guillaume Lécué

7 septembre 2016

# Références

## 1. Cours :

- ▶ V. Rivoirard et G. Stoltz, "*Statistiques en action*"
- ▶ P.J. Bickel et K. Doksum, "*Mathematical statistics*"
- ▶ A. Montfort, "*Cours de statistique mathématique*"

## 2. Exercices :

- ▶ J.J. Daudin, S. Robin et C. Vuillet, "*Statistique inférentielle. Idées, démarches, exemples*"
- ▶ D. Fourdrinier, "*Statistiques inférentielle : cours et exercices corrigés*"
- ▶ B. Cadre et C. Vial, "*Statistique Mathématique Cours et Exercices Corrigés*"

## Cours précédent (rappel)

- ▶ Expérience statistique, modèle statistique, échantillonnage
- ▶ Fonction de répartition empirique :

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

et quelques propriétés **asymptotiques** :

$$\widehat{F}_n(x) \xrightarrow{p.s.} F(x), \quad \left\| \widehat{F}_n - F \right\|_{\infty} \xrightarrow{p.s.} 0$$

leurs vitesses de convergence :

$$\sqrt{n}(\widehat{F}_n(x) - F(x)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, F(x)(1 - F(x))),$$

$$\sqrt{n} \left\| \widehat{F}_n(x) - F(x) \right\|_{\infty} \xrightarrow{d} K$$

- ▶ propriétés **non-asymptotique** grâce à Tchebychev.

# Aujourd'hui

Estimateur "plug-in" et la méthode delta

Quantiles empiriques et applications

Un algorithme "on-line" : Robbins-Monro

- ▶ **Objectif** : estimation d'une caractéristique scalaire  $T(F)$  d'une loi inconnue de fonction de répartition  $F$  à partir d'un  $n$ -échantillon  $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} X \sim F$  de cette loi

données :  $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} F \rightsquigarrow$  problème : **estimer**  $T(F)$

- ▶ Exemples

- ▶ Déjà vu : valeur en un point  $T(F) = F(x) = \mathbb{E} I(X \leq x)$
- ▶ Fonctionnelle régulière :

$$T(F) = h \left( \int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x) \right) = h(\mathbb{E} g(X))$$

où  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont **régulières** et  $X \sim F$

# Exemples de fonctionelles régulières

▶ Moyenne :  $T(F) = m(F) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x) = \mathbb{E} X$ .

▶ Variance :

$$T(F) = \sigma^2(F) = \int_{\mathbb{R}} (x - m(F))^2 dF(x) = \mathbb{E} (X - \mathbb{E} X)^2$$

▶ Asymétrie (skewness) :

$$T(F) = \alpha(F) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (x - m(F))^3 dF(x)}{\sigma^3(F)} = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E} X)^3}{\sigma^3(F)}$$

▶ Aplatissement (kurtosis) :

$$T(F) = \kappa(F) = \frac{\int_{\mathbb{R}} (x - m(F))^4 dF(x)}{\sigma^4(F)} = \frac{\mathbb{E} (X - \mathbb{E} X)^4}{\sigma^4(F)}$$

# Exemples de fonctionnelles non régulières

## Définition

Soit  $X$  une v.a.r. (de cdf  $F$ ) et  $0 < p < 1$ . On appelle **quantile d'ordre  $p$**  de  $X$  (resp.  $F$ ) :

$$q_p(F) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$$

- ▶ quand  $F$  est **continue et strictement croissante** le **quantile d'ordre  $p$**  de la loi  $F$  est l'unique solution de

$$F(q_p) = p \quad (\text{càd } q_p = F^{-1}(p)).$$

- ▶ la **médiane** =  $\text{med}(F) = q_{1/2}(F)$
- ▶ les **quartiles** =  $\{q_{1/4}(F), \text{med}(F), q_{3/4}(F)\}$

# Estimateur "plug-in"

## Définition

On appelle estimateur "plug-in" (càd "par substitution") de  $T(F)$  l'estimateur  $T(\hat{F}_n)$ .

- ▶ quand  $T(F) = h(\mathbb{E} g(X))$  alors l'estimateur *plug-in* de  $T(F)$  est :

$$T(\hat{F}_n) = h\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)\right)$$

- ▶ quand  $T(F) = q_p(F) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$ , l'estimateur *plug-in* est le **quantile empirique** :

$$T(\hat{F}_n) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \hat{F}_n(x) \geq p\}$$



Performances asymptotiques de l'estimateur plug-in pour l'estimation de fonctionnelles régulières de la forme  $T(F) = h(\mathbb{E} g(X))$

**Convergence (consistance)** : si  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h$  continue et  $\mathbb{E} |g(X)| < \infty$ , alors  $T(\widehat{F}_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} T(F)$  (LFGN + continuous map theorem).

**Vitesse de convergence (normalité asymptotique)** :

1. TCL :

$$\sqrt{n} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) - \mathbb{E} g(X) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \text{Var}[g(X)])$$

où  $\text{Var}[g(X)] = \mathbb{E} [(g(X) - \mathbb{E} g(X))^2]$

2. On a un résultat du type  $\sqrt{n}(Z_n - c_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c_2)$ . Comment transférer ce résultat à  $\sqrt{n}(h(Z_n) - h(c_1)) \xrightarrow{d} ?$

Vitesse de convergence de  $T(\widehat{F}_n)$  vers  $T(F) = h(\mathbb{E} g(X))$

## Théorème (Méthode « delta »)

Soit  $(Z_n)$  une suite de v.a.r. et  $V$  une v.a.r. telles que

$$a_n(Z_n - c_0) \xrightarrow{d} V$$

où  $(a_n)$  est une suite de réels positifs tendant vers  $+\infty$  et  $c_0$  est une constante. Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction **continue et dérivable en  $c_0$** . Alors

$$\boxed{a_n(h(Z_n) - h(c_0)) \xrightarrow{d} h'(c_0)V}$$

# Méthode Delta

1. si  $\sqrt{n}(Z_n - c_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c_2)$  et  $h$  dérivable en  $c_1$  alors

$$\sqrt{n}(h(Z_n) - h(c_1)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c_2[h'(c_1)]^2)$$

2. si  $V \sim \mathcal{N}(\mu, \nu)$  et  $a \in \mathbb{R}$  alors  $aV \sim \mathcal{N}(a\mu, a^2\nu)$ .
3. l'idée centrale de la preuve de la méthode Delta est un développement limité de  $h$  en  $c_0$  : quand  $n \rightarrow \infty$

$$a_n(h(Z_n) - h(c_0)) \approx h'(c_0)[a_n(Z_n - c_0)] \approx h'(c_0)V$$

**Conclusion** : normalité asymptotique de l'estimateur plug-in dans le cas de fonctionnelles régulières  $T(F) = h(\mathbb{E}g(X))$

### Proposition

Si  $\mathbb{E}[g(X)^2] < +\infty$  et  $h$  est une fonction continue et dérivable en  $\mathbb{E}g(X)$ , alors

$$\sqrt{n}(T(\hat{F}_n) - T(F)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, v(F)),$$

où  $v(F) = h'(\mathbb{E}[g(X)])^2 \text{Var}[g(X)]$ .

Pour construire un **intervalle de confiance**, on aimerait remplacer  $v(F)$  par  $v(\hat{F}_n)$  : quand  $h$  est  $\mathcal{C}^1$ , on montre que  $v(\hat{F}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} v(F)$  et, via le lemme de Slutsky,

$$\sqrt{n} \frac{T(\hat{F}_n) - T(F)}{v(\hat{F}_n)^{1/2}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

## Autre application de la méthode Delta : stabilisation de la variance

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon de loi Exponentielle de paramètre  $\theta \in [0, 1]$ .

- ▶ densité  $f(\theta, x) = \theta \exp(-\theta x)I(x > 0)$ , moyenne  $\mathbb{E}_\theta X = 1/\theta$ , variance  $\text{Var}_\theta X = 1/\theta^2$
- ▶ TCL :  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1/\theta^2)$
- ▶ **Pb.** : La variance asymptotique dépend du paramètre inconnu  $\theta$
- ▶ Méthode Delta : si  $g$  est  $\mathcal{C}^1$  alors :

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(1/\theta)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, (g'(1/\theta))^2/\theta^2)$$

- ▶ en particulier pour  $g(\theta) = \log(\theta)$ , on a

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

## Application : stabilisation de la variance (Bernoulli)

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon dans le modèle de Bernoulli de paramètre  $\theta \in [0, 1]$ .

- ▶ TCL :  $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta(1 - \theta))$
- ▶ La variance asymptotique dépend du paramètre inconnu  $\theta$
- ▶ Méthode Delta : si  $g$  est  $\mathcal{C}^1$  alors :

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, (g'(\theta))^2 \theta(1 - \theta))$$

- ▶ en particulier pour  $g(\theta) = 2\arcsin(\sqrt{\theta})$ , on a

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\theta)) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

# En dimension $k > 1$

- ▶ Il s'agit de fonctionnelles de la forme

$$T(F) = h(\mathbb{E} g_1(X), \dots, \mathbb{E} g_k(X))$$

où  $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathcal{C}^1$ .

- ▶ **Exemple** : le coefficient d'asymétrie

$$T(F) = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E} X)^3}{\sigma^3} = h(\mathbb{E} X, \mathbb{E} X^2, \mathbb{E} X^3)$$

où  $\sigma$  est l'écart-type de  $X$ .

- ▶ **Outil** : Versions multidimensionnelles
  1. du TCL
  2. de la « méthode delta ».

# TCL et méthode « delta » multidimensionnelle

- ▶ **TCL multidimensionnel** :  $(\mathbf{X}_n)_{n \geq 1}$  vecteurs aléatoires dans  $\mathbb{R}^k$ , i.i.d., de moyenne  $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{X}_1]$  et de matrice de variance-covariance  $\Sigma = \mathbb{E}[(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu})^\top]$ . Alors  $\bar{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$  vérifie :

$$\sqrt{n}(\bar{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

- ▶ **Méthode « delta » multidimensionnelle** : Si, de plus,  $h : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^d$  continûment différentiable, alors

$$\sqrt{n}(h(\bar{\mathbf{X}}_n) - h(\boldsymbol{\mu})) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \nabla h(\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma \nabla h(\boldsymbol{\mu})\right).$$

rem. : si  $A \in \mathbb{R}^{k \times d}$  et  $G \sim \mathcal{N}_k(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$  alors  $A^\top G \sim \mathcal{N}_d(A^\top \boldsymbol{\mu}, A^\top \Sigma A)$



## Notations : gradient (1/2)

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^k & \rightarrow \\ x & \mapsto \end{cases} \begin{pmatrix} \mathbb{R}^d \\ h_1(x) \\ \vdots \\ h_d(x) \end{pmatrix}$$

alors  $\nabla h(x) = (\nabla h_1(x) \quad \nabla h_2(x) \quad \cdots \quad \nabla h_d(x)) \in \mathbb{R}^{k \times d}$

$$\text{où } \nabla h_j(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} h_j(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_k} h_j(x) \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, d$$

tel que  $h_1(x + v) \approx h_1(x) + \langle \nabla h_1(x), v \rangle = h_1(x) + \nabla h_1(x)^\top v$  et de même

$$h(x + v) \approx h(x) + \langle \nabla h(x), v \rangle = h(x) + \nabla h(x)^\top v$$

## Notations : gradient (2/2)

Par exemple :

1. pour  $h(x) = Ax$  où  $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$ , on a :

$$\nabla h(x) = A^\top$$

2. pour  $h(x) = \|Ax\|_2^2$ , on a :

$$\nabla h(x) = 2A^\top Ax$$

3. pour  $h(x) = \|y - Ax\|_2^2$ , on a :

$$\nabla h(x) = -2A^\top (y - Ax)$$

# Application : coefficient d'asymétrie

- ▶ **Coefficient d'asymétrie** : on a

$$T(F) = h\left(\mathbb{E} X, \mathbb{E} X^2, \mathbb{E} X^3\right)$$

avec

$$h(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\gamma - 3\alpha\beta + 2\alpha^3}{(\beta - \alpha^2)^{3/2}}.$$

- ▶ **l'estimateur plug-in** est

$$T(\widehat{F}_n) = h\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3\right).$$

- ▶ On applique le **TCL multidimensionnel** avec  $\mathbf{X}_i = (X_i, X_i^2, X_i^3)^\top$  et  $\boldsymbol{\mu} = (\mathbb{E} X, \mathbb{E} X^2, \mathbb{E} X^3)^\top$ , puis la **méthode « delta »** avec  $h$ .

# Quantiles théoriques et empiriques

Quantile "théorique" d'ordre  $p$  :

$$T(F) = q_p(F) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$$

Quantile empirique d'ordre  $p$  :

$$T(\hat{F}_n) = \hat{q}_{n,p} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \hat{F}_n(x) \geq p\}$$

Question : Quelles sont les propriétés statistiques d'estimation de  $q_p(F)$  par  $\hat{q}_{n,p}$  ? (Pb. : on n'est plus dans le cas régulier)

## Définition

Soit  $X_1, \dots, X_n$  un  $n$ -échantillon de v.a.r.. On appelle *statistiques d'ordre* les  $n$  statistiques  $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$  construites telles que

$$X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

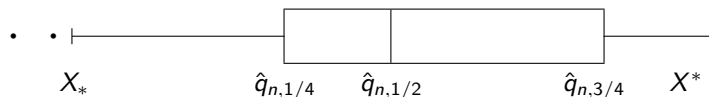
1. pour le quantile d'ordre  $0 < p < 1$  :

$$\hat{q}_{n,p} = X_{(k)} = X_{(\lceil np \rceil)} \text{ quand } \frac{k-1}{n} < p \leq \frac{k}{n}$$

2. en particulier, la médiane empirique vérifie :

$$\hat{q}_{n,1/2} = \text{med}(\hat{F}_n) = X_{(\lceil n/2 \rceil)} \text{ où } \lceil t \rceil = \min(n \in \mathbb{N} : n \geq t)$$

## Le boxplot : représentation synthétique de la dispersion de données réelles



fin de la “moustache” (whiskers) :

$$X_* = \min\{X_i : |X_i - \hat{q}_{n,1/4}| \leq 1,5\mathcal{I}_n\},$$

$$X^* = \max\{X_i : |X_i - \hat{q}_{n,3/4}| \leq 1,5\mathcal{I}_n\}.$$

Intervalle interquartile :

$$\mathcal{I}_n = \hat{q}_{n,3/4} - \hat{q}_{n,1/4}.$$

Les données au-delà des whiskers sont considérées comme *outliers*.  
(Il existe d'autres variantes)

# Exemple d'application du boxplot

[http://localhost:8888/notebooks/box\\_qqplots.ipynb](http://localhost:8888/notebooks/box_qqplots.ipynb) Box-plot

## Le qq-plot : test d'adéquation à une loi

Etant donné un  $n$ -échantillon  $X_1, \dots, X_n$  et une cdf  $F_{ref}$ , on veut tester si l'hypothèse suivante est acceptable :

$$(H_0) \quad \text{“Les } X_i \text{ sont distribués selon } F_{ref}\text{”}$$

Pour “accepter ou refuser visuellement” cette hypothèse, on peut tracer le qq-plot : c'est le **nuage de points**

$$\left( q_{i/n}(F_{ref}), \hat{q}_{n,i/n} \right)_{i=1}^n = \left( q_{i/n}(F_{ref}), X_{(i)} \right)_{i=1}^n$$

1. si le nuage de points est “approximativement” aligné avec la droite  $y = x$  alors l'hypothèse est acceptée (on trace aussi la droite  $y = x$  sur un qq-plot)
2. si les points sont “approximativement” alignés avec une droite affine alors l'hypothèse est vraie à une transformation de centrage et scaling près (généralement, on normalise les données)



# convergence des quantiles empiriques

## Théorème

Soit  $X$  une v.a.r. (on note par  $F$  sa cdf) admettant une densité  $f_X$  par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose que  $f_X$  est strictement positive p.s. sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et nulle en dehors. Soit  $0 < p < 1$ . On a

$$\widehat{q}_{n,p} \xrightarrow{p.s.} q_p(F) = q_p$$

Si de plus la densité  $f_X$  de  $X$  admet une version continue en  $q_p$  alors  $\widehat{q}_{n,p}$  est asymptotiquement Gaussien :

$$\sqrt{n}(\widehat{q}_{n,p} - q_p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{f_X(q_p)^2}\right)$$

# Convergence des quantiles empiriques

La variance asymptotique de  $\hat{q}_{n,p}$  est

$$\frac{p(1-p)}{f_X(q_p)^2}$$

La quantité  $f_X(q_p)$  est inconnue.

- ▶ Comme  $\hat{q}_{n,p}$  est **fortement consistant** et  $f_X$  est continue en  $q_p$ ,

$$f_X(\hat{q}_{n,p}) \xrightarrow{p.s.} f_X(q_p)$$

On peut donc "remplacer"  $q_p$  par  $\hat{q}_{n,p}$  grâce à Slutsky :

$$\frac{\sqrt{n}f_X(\hat{q}_{n,p})}{\sqrt{p(1-p)}}(\hat{q}_{n,p} - q_p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

- ▶ Mais  $f_X(\hat{q}_{n,p})$  est aussi inconnue ! (problème d'estimation de densité)

# Limites de l'approche "plug-in"

L'estimation de  $T(F)$  par  $T(\widehat{F}_n)$  n'est pas toujours **possible** :

- ▶ Exemple : si  $F$  admet une densité  $f$  continue par rapport à la mesure de Lebesgue qu'on souhaite estimer en un  $x_0$  donné :

$$T(F) = f(x_0) = F'(x_0),$$

on ne **peut pas prendre** comme estimateur  $\widehat{F}'_n(x_0)$  car  $\widehat{F}_n$  est constante par morceaux.

L'estimation de  $T(F)$  par  $T(\widehat{F}_n)$  n'est pas toujours **souhaitable** :

- ▶ Souvent on dispose d'information **a priori** supplémentaire :  $F$  appartient à une sous-classe particulière de distributions (**le modèle**) et il y a des choix plus judicieux que l'estimateur par plug-in (cf. cours suivants).

# Un algorithme "on-line" : Robbins-Monro

# "Batch" vs "on-line"

Il existe principalement deux manières de générer/recevoir des données :

- ▶ **"batch"** : les données sont toutes obtenues en une seule fois (ex. : jeux de données)
- ▶ **"on-line"** : les données sont obtenues les unes à la suite des autres (ex. : données en temps réel)

Remarque :

1.  $\hat{F}_n$  et  $\hat{q}_{n,\alpha}$  sont des estimateurs "batch"
2. on peut regarder les données "batch" comme des données "on-line" (cf. vovpal wabbit)

# Estimation "on-line" des quantiles

Question : ebay souhaite connaître le 95-ième pourcentile des montants de transaction sur son site.

Deux stratégies :

1. "batch" : on reprend tous les achats passés sur eBay depuis sa création et on calcul  $\hat{q}_{n,95/100}$ . Problème :  $n$  est très grand !
2. "on-line" : à chaque nouvel achat, on actualise un estimateur (en temps réel).

**Rem.** : De nombreux estimateurs on-line sont adaptés d'algorithmes d'optimisation convexe itératifs comme la **descente de gradient**.

# Descente de gradient / méthode de Newton

Problème : trouver un zéro d'une fonction  $f$  croissante et  $\mathcal{C}^1$  : trouver  $x$  tel que

$$f(x) = 0$$

La méthode de Newton est une méthode itérative :

**Init** :  $x_0 \in \mathbb{R}$  **while** *stopping criteria* **do**

1. on fait une DL de  $f$  en  $x_k$  :

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

2. on résoud  $f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$  (au lieu de  $f(x) = 0$ ) :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

**end**

# Descente de gradient / méthode de Newton

1. Critère d'arrêt (pour  $\epsilon$  donné) :

$$|f(x_k)| \leq \epsilon \text{ ou } |x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$$

2. Quand la fonction n'est pas dérivable ou que la dérivée est difficile à calculer, on remplace  $f'(x_k)$  par  $\eta_k^{-1}$  (step size)
3. chercher le minimum d'une fonction convexe  $h$  c'est chercher un zéro d'une fonction croissante  $h'$  : méthode de Newton = descente de gradient

$$x_{k+1} = x_k - \frac{h'(x_k)}{h''(x_k)}$$

(et si  $h''$  n'existe pas ou difficile à calculer :  $h''(x_k) \leftrightarrow \eta_k^{-1}$ )



## Estimation "on-line" des quantiles par Robbins-Monro (1/2)

Soit  $X$  une v.a.r. admettant une densité  $f$  strictement positive sur une intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  et nulle en dehors de cet intervalle. On note par  $F$  la cdf de  $X$ .

1.  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  :  $F' = f$  p.p.
2.  $F$  est strictement croissante sur  $I$
3. soit  $p \in (0, 1)$ , le quantile d'ordre  $p$  de  $X$  est l'unique solution de

$$F(x) - p = 0$$

On est donc amené à trouver le zéro d'une fonction dérivable strictement croissante : on peut utiliser la méthode de Newton

L'algorithme de Newton est

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k) - p}{f(x_k)}$$

Problèmes :

1.  $f$  est inconnu :  $f(x_k) \leftrightarrow \eta_k^{-1}$  (step size)
2.  $F$  est inconnue : on écrit  $F(x_k) = \mathbb{E} I(X \leq x_k)$  et on "estime"  $F(x_k)$  par  $I(X_{k+1} \leq x_k)$  grâce à la nouvelle donnée  $X_{k+1}$

On obtient l'algorithme de Robbins-Monro (1954) :

$$x_{k+1} = x_k - \eta_k (I(X_{k+1} \leq x_k) - p)$$

# Robbins-Monro / descente de gradient stochastique

L'**algorithme de Robbins-Monro** (RM) pour l'estimation du quantile d'ordre  $p \in (0, 1)$  est le suivant :

**Data:**  $X_1, \dots, X_n$  v.a.r.i.i.d.

**Init :**  $x_0 \in (0, 1)$ ,  $(\eta_k)_k$  une suite de nombre réels positifs

**for**  $k = 0, \dots, n$  **do**

$$x_{k+1} = x_k - \eta_k (I(X_{k+1} \leq x_k) - p)$$

**end**

1. écriture en **pseudo-code**
2. algorithme **itératif**
3.  $(\eta_k)_k$  est appelé le **step size**. Par exemple :

$$\eta_k = k^{-a}, \text{ où } a \in (1/2, 1] \text{ (ou "line search")}$$

4.  $x_0$  **starting point** (cf. "warm start")

### Théorème

Soit  $p \in (0, 1)$  et  $X$  une v.a.r. dont la cdf  $F$  vérifie :

1.  $F$  est continue
2. il existe un unique  $q_p \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x \neq q_p$ ,

$$(x - q_p)(F(x) - p) > 0$$

Soit  $(X_k)_k \stackrel{i.i.d.}{\sim} X$ . Alors, la suite itérative de RM  $(x_k)_k$  où  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $x_{k+1} = x_k - \eta_k(I(X_{k+1} \leq x_k) - p)$  converge presque sûrement vers  $q_p$  quand le step size  $(\eta_k)_k$  vérifie :

$$\sum_k \eta_k = +\infty \text{ et } \sum_k \eta_k^2 < +\infty$$

# Vitesse de convergence de RM

## Théorème

Si de plus  $F$  est  $\mathcal{C}^2$  alors pour  $f = F'$  (densité de  $X$ ) et  $\sigma^2 = p(1-p)$ , quand  $n \rightarrow \infty$  :

1. si  $f(q_p) > 1/2$  alors

$$\sqrt{n}(x_n - q_p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2f(q_p) - 1}\right)$$

2. si  $f(q_p) = 1/2$  alors

$$\sqrt{\frac{n}{\log n}}(x_n - q_p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

3. si  $0 < f(q_p) < 1/2$  alors  $n^{f(q_p)}(x_n - q_p) \xrightarrow{d} Z$  où  $Z$  est une variable aléatoire bornée p.s..

# Comparaison d'estimateurs (1/2)

Problème : Dans le cadre "batch", on a construit deux estimateurs du quantile  $q_p(F)$  :  $\hat{q}_{n,p}$  et  $x_n$  (RM) lequel choisir ?

## 1) critères théoriques (asymptotique) :

- ▶ les deux estimateurs sont fortement **consistants**
- ▶ la **vitesse de convergence** de  $\hat{q}_{n,p}$  est toujours en  $1/\sqrt{n}$  alors que celle de  $x_n$  se dégrade quand  $f(q_p) \leq 1/2 \Rightarrow$

$\hat{q}_{n,p}$  est préférable à  $x_n$  quand  $f(q_p) \leq 1/2$

- ▶ quand  $1/2 < f(q_p)$ ,  $\hat{q}_{n,p}$  et  $x_n$  sont tous les deux asymptotiquement normaux de vitesse de convergence en  $1/\sqrt{n}$  mais leurs **variances asymptotiques** sont

- ★ pour  $\hat{q}_{n,p}$  :  $\sigma^2/f(q_p)^2$

- ★ pour  $x_n$  :  $\sigma^2/(2f(q_p) - 1)$

or  $\sigma^2/f(q_p)^2 \leq \sigma^2/(2f(q_p) - 1)$  donc

$\hat{q}_{n,p}$  est préférable à  $x_n$  quand  $1/2 < f(q_p)$

D'un point de vue théorique,  $\hat{q}_{n,p}$  est préférable à  $x_n$

# Comparaison d'estimateurs (2/2)

## 2) critères empiriques :

- ▶ **coût de calcul** : la construction de  $\hat{q}_{n,p}$  nécessite le tri des données  $X_1, \dots, X_n$  (qui peuvent être distribuée quand  $n$  est grand) contrairement à  $x_n$  qui est on-line  $\Rightarrow$   
 $x_n$  est préférable à  $\hat{q}_{n,p}$  quand  $n$  est grand
- ▶ **Etude de la convergence sur des données simulées** : l'intérêt des données simulées est qu'on connaît la valeur de l'objet à estimer.  
[http://localhost:8888/notebooks/rm\\_quantile.ipynb](http://localhost:8888/notebooks/rm_quantile.ipynb)  
Robbins-Monro
- ▶ **Etude des estimateurs sur des données réelles** : cohérence des résultats; échantillon test.