Statistiques mathématiques : cours 2

Guillaume Lecué

7 septembre 2017

Références

1. Cours :
   - V. Rivoirard et G. Stoltz, "*Statistiques en action*"
   - P.J. Bickel et K. Doksum, "*Mathematical statistics*"
   - A. Montfort, "*Cours de statistique mathématique*"
2. Exercices :
   - J.J. Daudin, S. Robin et C. Vuillet, "*Statistique inférentielle. Idées, démarches, exemples*"
   - D. Fourdrinier, "*Statistiques inférentielle : cours et exercices corrigés*"
   - B. Cadre et C. Vial, "*Statistique Mathématique Cours et Exercices Corrigés*"

Cours précédent (rappel)

- Expérience statistique, modéle statistique, échantillonnage
- Fonction de répartition empirique :

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I\left(X_i \leq x\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

et quelques propriétés asymptotiques :

$$\widehat{F}_n(x) \xrightarrow{p.s.} F(x), \quad \left\|\widehat{F}_n - F\right\|_\infty \xrightarrow{p.s.} 0$$

leurs vitesses de convergence :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{F}_n(x) - F(x)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, F(x)(1-F(x))),$$

$$\sqrt{n}\left\|\widehat{F}_n(x) - F(x)\right\|_\infty \xrightarrow{d} K$$

- propriétés non-asymptotique grâce à Tchebychev.

Aujourd'hui

Estimateur "plug-in" et la méthode delta

Quantiles empiriques et applications

Un algorithme "on-line" : Robbins-Monro

- Objectif : estimation d'une caractéristique scalaire $T(F)$ d'une loi inconnue de fonction de répartition F à partir d'un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} X \sim F$ de cette loi

$$\text{données : } X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} F \rightsquigarrow \quad \text{problème : estimer } T(F)$$

- Exemples
  - Déjà vu : valeur en un point $T(F) = F(x) = \mathbb{E}\, I(X \leq x)$
  - Fonctionnelle régulière :

$$T(F) = h\left(\int_{\mathbb{R}} g(x) dF(x)\right) = h\big(\mathbb{E}\, g(X)\big)$$

où $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont régulières et $X \sim F$

Exemples de fonctionelles régulières

- Moyenne : $T(F) = m(F) = \int_{\mathbb{R}} x dF(x) = \mathbb{E}\, X$.
- Variance :

$$T(F) = \sigma^2(F) = \int_{\mathbb{R}} \left(x - m(F)\right)^2 dF(x) = \mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}\, X\right)^2$$

- Asymétrie (*skewness*) :

$$T(F) = \alpha(F) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \left(x - m(F)\right)^3 dF(x)}{\sigma^3(F)} = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}\, X)^3}{\sigma^3(F)}$$

- Aplatissement (*kurtosis*) :

$$T(F) = \kappa(F) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \left(x - m(F)\right)^4 dF(x)}{\sigma^4(F)} = \frac{\mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}\, X\right)^4}{\sigma^4(F)}$$

Exemples de fonctionnelles non regulières

Définition

Soit X une v.a.r. (de cdf F) et $0 < p < 1$. On appelle quantile d'ordre p de X (resp. F) :

$$q_p(F) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$$

- quand F est continue et strictement croissante le **quantile d'ordre** p de la loi F est l'unique solution de

$$F(q_p) = p \qquad (\text{ càd } \quad q_p = F^{-1}(p)\ ).$$

- la **médiane** $= \mathrm{med}(F) = q_{1/2}(F)$
- les **quartiles** $= \{q_{1/4}(F), \mathrm{med}(F), q_{3/4}(F)\}$

Estimateur "plug-in"

Définition

On appelle estimateur "plug-in" (càd "par substitution") de $T(F)$ l'estimateur $T(\widehat{F}_n)$.

- quand $T(F) = h\big(\mathbb{E}\, g(X)\big)$ alors l'estimateur *plug-in* de $T(F)$ est :

$$\boxed{T(\widehat{F}_n) = h\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)\Big)}$$

- quand $T(F) = q_p(F) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$, l'estimateur *plug-in* est le quantile empirique :

$$\boxed{T(\widehat{F}_n) = \inf\{x \in \mathbb{R} : \widehat{F}_n(x) \geq p\}}$$

Performances asymptotiques de l'estimateur plug-in pour l'estimation de fonctionnelles régulières de la forme $T(F) = h\big(\mathbb{E}\, g(X)\big)$

Convergence (consistance) : si $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, h continue et $\mathbb{E}\,|g(X)| < \infty$, alors $T(\widehat{F}_n) \overset{\text{p.s.}}{\to} T(F)$ (LFGN + continuous map theorem).

Vitesse de convergence (normalité asymptotique) :

1. TCL :

$$\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) - \mathbb{E}\, g(X)\Big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, \operatorname{Var}\big[g(X)\big]\big)$$

   où $\operatorname{Var}\big[g(X)\big] = \mathbb{E}\left[(g(X) - \mathbb{E}\, g(X))^2\right]$

2. On a un résultat du type $\sqrt{n}(Z_n - c_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c_2)$. Comment transférer ce résultat à $\sqrt{n}(h(Z_n) - h(c_1)) \xrightarrow{d} ?$

Théorème (Méthode « delta »)

Soit (Z_n) une suite de v.a.r. et V une v.a.r. telles que

$$a_n(Z_n - c_0) \xrightarrow{d} V$$

où (a_n) est une suite de réels positifs tendant vers $+\infty$ et c_0 est une constante. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable en c_0. Alors

$$\boxed{a_n\big(h(Z_n) - h(c_0)\big) \xrightarrow{d} h'(c_0)V}$$

Méthode Delta

1. si $\sqrt{n}(Z_n - c_1) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, c_2)$ et h dérivable en c_1 alors

$$\boxed{\sqrt{n}\big(h(Z_n) - h(c_1)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, c_2[h'(c_1)]^2\big)}$$

2. si $V \sim \mathcal{N}(\mu, v)$ et $a \in \mathbb{R}$ alors $aV \sim \mathcal{N}(a\mu, a^2 v)$.
3. l'idée centrale de la preuve de la méthode Delta est un développement limité de h en c_0 : quand $n \to \infty$

$$a_n(h(Z_n) - h(c_0)) \approx h'(c_0)\big[a_n(Z_n - c_0)\big] \approx h'(c_0)V$$

Conclusion : normalité asymptotique de l'estimateur plug-in dans le cas de fonctionnelles regulières $T(F) = h(\mathbb{E}\, g(X))$

Proposition

Si $\mathbb{E}[g(X)^2] < +\infty$ *et* h *est une fonction continue et dérivable en* $\mathbb{E}\, g(X)$, *alors*

$$\sqrt{n}\big(T(\widehat{F}_n) - T(F)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, v(F)\big),$$

où $v(F) = h'\big(\mathbb{E}\left[g(X)\right]\big)^2 \mathrm{Var}\left[g(X)\right]$.

Pour construire un intervalle de confiance, on aimerait remplacer $v(F)$ par $v(\widehat{F}_n)$: quand h est $\mathcal{C}^1$, on montre que $v(\widehat{F}_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} v(F)$ et, via le lemme de Slutsky,

$$\boxed{\sqrt{n}\frac{T(\widehat{F}_n) - T(F)}{v(\widehat{F}_n)^{1/2}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0,1\big)}$$

Autre application de la méthode Delta : stabilisation de la variance

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de loi Exponentielle de paramétre $\theta \in [0, 1]$.

- densité $f(\theta, x) = \theta \exp(-\theta x) I(x > 0)$, moyenne $\mathbb{E}_\theta X = 1/\theta$, variance $\mathrm{Var}_\theta X = 1/\theta^2$
- TCL : $\sqrt{n}\big(\bar{X}_n - 1/\theta\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1/\theta^2)$
- **Pb. :** La variance asymptotique dépend du paramètre inconnu θ
- Méthode Delta : si g est $\mathcal{C}^1$ alors :

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(1/\theta)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, (g'(1/\theta))^2/\theta^2\big)$$

- en particulier pour $g(\theta) = \log(\theta)$, on a

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\theta)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Application : stabilisation de la variance (Bernoulli)

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon dans le modèle de Bernoulli de paramétre $\theta \in [0, 1]$.

- TCL : $\sqrt{n}\big(\bar{X}_n - \theta\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \theta(1-\theta))$
- La variance asymptotique dépend du paramétre inconnu θ
- Méthode Delta : si g est $\mathcal{C}^1$ alors :

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\theta)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, (g'(\theta))^2\theta(1-\theta)\big)$$

- en particulier pour $g(\theta) = 2arcsin(\sqrt{\theta})$, on a

$$\sqrt{n}\big(g(\bar{X}_n) - g(\theta)\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

En dimension $k > 1$

- Il s'agit de fonctionnelles de la forme

$$T(F) = h\left(\mathbb{E}\, g_1(X), \ldots, \mathbb{E}\, g_k(X)\right)$$

où $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$.

- Exemple : le coefficient d'asymétrie

$$T(F) = \frac{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}\, X)^3}{\sigma^3} = h(\mathbb{E}\, X, \mathbb{E}\, X^2, \mathbb{E}\, X^3)$$

où σ est l'écart-type de X.

- Outil : Versions multidimensionnelles
  1. du TCL
  2. de la « méthode delta ».

TCL et méthode « delta » multidimensionnelle

- TCL multidimensionnel : $(\mathbf{X}_n)_{n\geq 1}$ vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^k$, i.i.d., de moyenne $\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}[\mathbf{X}_1]$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}_1 - \boldsymbol{\mu})^\top\right]$. Alors $\bar{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i$ vérifie :

$$\sqrt{n}\big(\overline{\mathbf{X}}_n - \boldsymbol{\mu}\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\big(0, \Sigma\big)$$

- Méthode « delta » multidimensionnelle : Si, de plus, $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$ continûment différentiable, alors

$$\sqrt{n}\big(h(\overline{\mathbf{X}}_n) - h(\boldsymbol{\mu})\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(0, \nabla h(\boldsymbol{\mu})^\top \Sigma \nabla h(\boldsymbol{\mu})\Big).$$

rem. : si $A \in \mathbb{R}^{k\times d}$ et $G \sim \mathcal{N}_k(\mu, \Sigma)$ alors $A^\top G \sim \mathcal{N}_d(A^\top \mu, A^\top \Sigma A)$

Notations : gradient (1/2)

$$h : \begin{cases} \mathbb{R}^k & \to & \mathbb{R}^d \\ x & \mapsto & \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_d(x) \end{pmatrix} \end{cases}$$

alors $\boxed{\nabla h(x) = \begin{pmatrix} \nabla h_1(x) & \nabla h_2(x) & \cdots & \nabla h_d(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k \times d}}$

$$\text{où } \nabla h_j(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} h_j(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_k} h_j(x) \end{pmatrix} \quad j = 1, \ldots, d$$

tel que $h_1(x+v) \approx h_1(x) + \langle \nabla h_1(x), v \rangle = h_1(x) + \nabla h_1(x)^\top v$ et de même

$$h(x+v) \approx h(x) + \langle \nabla h(x), v \rangle = h(x) + \nabla h(x)^\top v$$

Notations : gradient (2/2)

Par exemple :

1. pour $h(x) = Ax$ où $A \in \mathbb{R}^{d \times k}$, on a :

$$\nabla h(x) = A^\top$$

2. pour $h(x) = \|Ax\|_2^2$, on a :

$$\nabla h(x) = 2A^\top Ax$$

3. pour $h(x) = \|y - Ax\|_2^2$, on a :

$$\nabla h(x) = -2A^\top (y - Ax)$$

Application : coefficient d'asymétrie

- Coefficient d'asymétrie : on a

$$T(F) = h\Big(\mathbb{E}\,X, \mathbb{E}\,X^2, \mathbb{E}\,X^3\Big)$$

avec

$$h(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\gamma - 3\alpha\beta + 2\alpha^3}{(\beta - \alpha^2)^{3/2}}.$$

- l'estimateur plug-in est

$$T(\widehat{F}_n) = h\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^3\Big).$$

- On applique le TCL multidimensionnel avec $\mathbf{X}_i = (X_i, X_i^2, X_i^3)^\top$ et $\boldsymbol{\mu} = \big(\mathbb{E}\,X, \mathbb{E}\,X^2, \mathbb{E}\,X^3\big)^\top$, puis la méthode « delta » avec h.

Quantiles théoriques et empiriques

Quantile "théorique" d'ordre p :

$$T(F) = q_p(F) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$$

Quantile empirique d'ordre p :

$$T(\widehat{F}_n) = \widehat{q}_{n,p} = \inf\{x \in \mathbb{R} : \widehat{F}_n(x) \geq q\}$$

Question : Quelles sont les propriétés statistiques d'estimation de $q_p(F)$ par $\widehat{q}_{n,p}$? (Pb. : on n'est plus dans le cas régulier)

Définition

Soit $X_1, \ldots, X_n$ un n-échantillon de v.a.r.. On appelle statistiques d'ordre les n statistiques $X_{(1)}, \ldots, X_{(n)}$ construites telles que

$$X_{(1)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$$

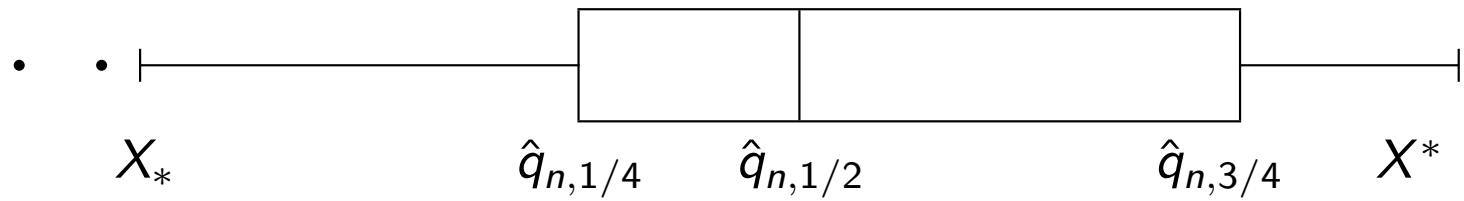
1. pour le quantile d'ordre $0 < p < 1$:

$$\boxed{\widehat{q}_{n,p} = X_{(k)} = X_{(\lceil np \rceil)} \text{ quand } \frac{k-1}{n} < p \leq \frac{k}{n}}$$

2. en particulier, la médiane empirique vérifie :

$$\boxed{\widehat{q}_{n,1/2} = \mathrm{med}(\widehat{F}_n) = X_{(\lceil n/2 \rceil)}} \text{ où } \lceil t \rceil = \min(n \in \mathbb{N} : n \geq t)$$

Le boxplot : représentation synthétique de la dispersion de données réelles



fin de la "moustache" (whiskers) :

$$X_* = \min\{X_i : |X_i - \hat{q}_{n,1/4}| \leq 1,5\mathcal{I}_n\},$$

$$X^* = \max\{X_i : |X_i - \hat{q}_{n,3/4}| \leq 1,5\mathcal{I}_n\}.$$

Intervalle interquartile :

$$\mathcal{I}_n = \hat{q}_{n,3/4} - \hat{q}_{n,1/4}.$$

Les données au-delà des whiskers sont considérées comme *outliers*.
(Il existe d'autres variantes)

Exemple d'application du boxplot

`http://localhost:8888/notebooks/box_qqplots.ipynb` Box-plot

Le qq-plot : test d'adéquation à une loi

Etant donné un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ et une cdf F_{ref}, on veut tester si l'hypothèse suivante est acceptable :

$$(H_0) \qquad \text{“Les } X_i \text{ sont distribués selon } F_{ref}\text{”}$$

Pour “accepter ou refuser visuellement” cette hypothèse, on peut tracer le qq-plot : c'est le nuage de points

$$\boxed{\left(q_{i/n}(F_{ref}), \widehat{q}_{n,i/n}\right)_{i=1}^{n} = \left(q_{i/n}(F_{ref}), X_{(i)}\right)_{i=1}^{n}}$$

1. si le nuage de points est “approximativement” aligné avec la droite $y = x$ alors l'hypothèse est acceptée (on trace aussi la droite $y = x$ sur un qq-plot)
2. si les points sont “approximativement” alignés avec une droite affine alors l'hypothèse est vraie à une transformation de centrage et scaling prés (généralement, on normalise les données)

convergence des quantiles empiriques

Théorème

Soit X une v.a.r. (on note par F sa cdf) admettant une densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue. On suppose que f_X est strictement positive p.s. sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et nulle en dehors. Soit $0 < p < 1$. On a

$$\boxed{\widehat{q}_{n,p} \xrightarrow{p.s.} q_p(F) = q_p}$$

Si de plus la densité f_X de X admet une version continue en q_p alors $\widehat{q}_{n,p}$ est asymptotiquement Gaussien :

$$\boxed{\sqrt{n}\left(\widehat{q}_{n,p} - q_p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{p(1-p)}{f_X(q_p)^2}\right)}$$

Convergence des quantiles empiriques

La variance asymptotique de $\widehat{q}_{n,p}$ est

$$\boxed{\frac{p(1-p)}{f_X(q_p)^2}}$$

La quantité $f_X(q_p)$ est inconnue.

- Comme $\widehat{q}_{n,p}$ est fortement consistant et f_X est continue en q_p,

$$f_X(\widehat{q}_{n,p}) \xrightarrow{p.s.} f_X(q_p)$$

On peut donc "remplacer" q_p par $\widehat{q}_{n,p}$ grâce à Slustky :

$$\frac{\sqrt{n} f_X(\widehat{q}_{n,p})}{\sqrt{p(1-p)}} (\widehat{q}_{n,p} - q_p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$$

- Mais $f_X(\widehat{q}_{n,p})$ est aussi inconnue ! (problème d'estimation de densité)

Limites de l'approche "plug-in"

L'estimation de $T(F)$ par $T(\widehat{F}_n)$ n'est pas toujours possible :

- Exemple : si F admet une densité f continue par rapport à le mesure de Lebesgue qu'on souhaite estimer en un x_0 donné :

$$T(F) = f(x_0) = F'(x_0),$$

on ne peut pas prendre comme estimateur $\widehat{F}'_n(x_0)$ car $\widehat{F}_n$ est constante par morceaux.

L'estimation de $T(F)$ par $T(\widehat{F}_n)$ n'est pas toujours souhaitable :

- Souvent on dispose d'information a priori supplémentaire : F appartient à une sous-classe particulière de distributions (le modéle) et il y a des choix plus judicieux que l'estimateur par plug-in (cf. cours suivants).

Un algorithme "on-line" : Robbins-Monro

"Batch" vs "on-line"

Il existe principalement deux manières de générer/recevoir des données :

- "batch" : les données sont toutes obtenues en une seule fois (ex. : jeux de données)
- "on-line" : les données sont obtenues les unes à la suite des autres (ex. : données en temps réel)

Remarque :

1. $\widehat{F}_n$ et $\widehat{q}_{n,\alpha}$ sont des estimateurs "batch"
2. on peut regarder les données "batch" commme des données "on-line" (cf. vowpal wabbit)

Estimation "on-line" des quantiles

Question : ebay souhaite connaître le 95-ième pourcentile des montants de transaction sur son site.

Deux stratégies :

1. "batch" : on reprend tous les achats passés sur eBay depuis sa création et on calcul $\widehat{q}_{n,95/100}$. Problème : n est très grand !
2. "on-line" : à chaque nouvel achat, on actualise un estimateur (en temps réel).

Rem. : De nombreux estimateurs on-line sont adaptés d'algorithmes d'optimisation convexe itératifs comme la **descente de gradient**.

Descente de gradient / méthode de Newton

Problème : trouver un zéro d'une fonction f croissante et $\mathcal{C}^1$: trouver x tel que

$$f(x) = 0$$

La méthode de Newton est une méthode itérative :

Init : $x_0 \in \mathbb{R}$ **while** *stopping criteria* **do**

1. on fait une DL de f en x_k :

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k)$$

2. on résoud $f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) = 0$ (au lieu de $f(x) = 0$) :

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

end

Descente de gradient / méthode de Newton

1. Critère d'arrêt (pour ϵ donné) :

$$|f(x_k)| \leq \epsilon \text{ ou } |x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$$

2. Quand la fonction n'est pas dérivable ou que la dérivée est difficile à calculer, on remplace $f'(x_k)$ par η_k^{-1} (step size)
3. chercher le minimum d'une fonction convexe h c'est chercher un zéro d'une fonction croissante h' : méthode de Newton = descente de gradient

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{h'(x_k)}{h''(x_k)}}$$

(et si h'' n'existe pas ou difficile à calculer : $h''(x_k) \leftrightarrow \eta_k^{-1}$)

Estimation "on-line" des quantiles par Robbins-Monro (1/2)

Soit X une v.a.r. admettant une densité f strictement positive sur une intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et nulle en dehors de cet intervalle. On note par F la cdf de X.

1. F est dérivable sur $\mathbb{R}$: $F' = f$ p.p.
2. F est strictement croissante sur I
3. soit $p \in (0,1)$, le quantile d'ordre p de X est l'unique solution de

$$\boxed{F(x) - p = 0}$$

On est donc amené à trouver le zéro d'une fonction dérivable strictement croissante : on peut utiliser la méthode de Newton

Estimation "on-line" des quantiles par Robbins-Monro (2/2)

L'algorithme de Newton est

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k) - p}{f(x_k)}$$

Problèmes :

1. f est inconnu : $f(x_k) \leftrightarrow \eta_k^{-1}$ (step size)
2. F est inconnue : on écrit $F(x_k) = \mathbb{E}\, I(X \leq x_k)$ et on "estime" $F(x_k)$ par $I(X_{k+1} \leq x_k)$ grâce à la nouvelle donnée X_{k+1}

On obtient l'algorithme de Robbins-Monro (1954) :

$$x_{k+1} = x_k - \eta_k(I(X_{k+1} \leq x_k) - p)$$

Robbins-Monro / descente de gradient stochastique

L'algorithme de Robbins-Monro (RM) pour l'estimation du quantile d'ordre $p \in (0,1)$ est le suivant :

Data: $X_1, \ldots, X_n$ v.a.r.i.i.d.
Init : $x_0 \in (0,1)$, $(\eta_k)_k$ une suite de nombre réels positifs
for $k = 0, \ldots, n$ **do**

$$x_{k+1} = x_k - \eta_k \big(I(X_{k+1} \leq x_k) - p \big)$$

end

1. écriture en pseudo-code
2. algorithme itératif
3. $(\eta_k)_k$ est appelé le step size. Par exemple :

$$\eta_k = k^{-a}, \text{ où } a \in (1/2, 1] \quad \text{(ou "line search")}$$

4. x_0 starting point (cf. "warm start")

Théorème

Soit $p \in (0,1)$ et X une v.a.r. dont la cdf F vérifie :

1. *F est continue*
2. *il existe un unique $q_p \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \neq q_p$,*

$$(x - q_p)\big(F(x) - p\big) > 0$$

Soit $(X_k)_k \overset{i.i.d.}{\sim} X$. Alors, la suite itérative de RM $(x_k)_k$ où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{k+1} = x_k - \eta_k(I(X_{k+1} \leq x_k) - p)$ converge presque surement vers q_p quand le step size $(\eta_k)_k$ vérifie :

$$\sum_k \eta_k = +\infty \text{ et } \sum_k \eta_k^2 < +\infty$$

Vitesse de convergence de RM

Théorème

Si de plus F est $\mathcal{C}^2$ alors pour $f = F'$ (densité de X) et $\sigma^2 = p(1-p)$, quand $n \to \infty$:

1. *si $f(q_p) > 1/2$ alors*

$$\sqrt{n}(x_n - q_p) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{2f(q_p) - 1}\right)$$

2. *si $f(q_p) = 1/2$ alors*

$$\sqrt{\frac{n}{\log n}}\left(x_n - q_p\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

3. *si $0 < f(q_p) < 1/2$ alors $n^{f(q_p)}\left(x_n - q_p\right) \xrightarrow{d} Z$ où Z est une variable aléatoire bornée p.s..*

Comparaison d'estimateurs (1/2)

Problème : Dans le cadre "batch", on a construit deux estimateurs du quantile $q_p(F)$: $\widehat{q}_{n,p}$ et x_n (RM) lequel choisir ?

1) critères théoriques (asymptotique) :

- les deux estimateurs sont fortement consistants
- la vitesse de convergence de $\widehat{q}_{n,p}$ est toujours en $1/\sqrt{n}$ alors que celle de x_n se dégrade quand $f(q_p) \leq 1/2 \Rightarrow$

$$\widehat{q}_{n,p} \textbf{ est préférable à } x_n \textbf{ quand } f(q_p) \leq 1/2$$

- quand $1/2 < f(q_p)$, $\widehat{q}_{n,p}$ et x_n sont tous les deux asymptotiquement normaux de vitesse de convergence en $1/\sqrt{n}$ mais leurs variances asymtotiques sont
  - ⋆ pour $\widehat{q}_{n,p}$: $\sigma^2/f(q_p)^2$
  - ⋆ pour x_n : $\sigma^2/(2f(q_p)-1)$

  or $\sigma^2/f(q_p)^2 \leq \sigma^2/(2f(q_p)-1)$ donc

$$\widehat{q}_{n,p} \textbf{ est préférable à } x_n \textbf{ quand } 1/2 < f(q_p)$$

D'un point de vue théorique, $\widehat{q}_{n,p}$ est préférable à x_n

Comparaison d'estimateurs (2/2)

2) critères empiriques :

- coût de calcul : la construction de $\widehat{q}_{n,p}$ nécessite le tri des données $X_1, \ldots, X_n$ (qui peuvent être distribuée quand n est grand) contrairement à x_n qui est on-line $\Rightarrow$

  x_n est préférable à $\widehat{q}_{n,p}$ quand n est grand

- Etude de la convergence sur des données simulées : l'intérêt des données simulées est qu'on connaît la valeur de l'objet à estimer.

  `http://localhost:8888/notebooks/rm_quantile.ipynb`

  Robbins-Monro

- Etude des estimateurs sur des données réelles : cohérence des résultats ; échantillon test.