Statistiques mathématiques : cours 4

Guillaume Lecué

30 août 2018

Rappels du cours 3 : Z et M-estimation, EMV

Z-estimation

- <u>Situation</u> : on observe $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta$ sur $\mathbb{R}$ et $\theta \in \Theta$
- <u>Principe</u> : Trouver une application $\phi : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$,

$$a \mapsto \mathbb{E}_\theta \left[\phi(a, X)\right] = \int \phi(a, x)\, \mathbb{P}_\theta(dx)$$

admet un zéro en $a = \theta$

Définition

On appelle Z-estimateur associé à ϕ tout estimateur $\widehat{\theta}_n \in \Theta$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^{n} \phi(\widehat{\theta}_n, X_i) = 0$$

M-estimation

- Situation : on observe $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta$ sur $\mathbb{R}$ et $\theta \in \Theta$.
- Principe : Trouver une application $\psi : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$,

$$a \mapsto \mathbb{E}_\theta \left[\psi(a, X)\right] = \int \psi(a, x)\, \mathbb{P}_\theta(dx)$$

admet un maximum en $a = \theta$

Définition

On appelle M-estimateur associé à ψ tout estimateur $\widehat{\theta}_n \in \Theta$ satisfaisant

$$\sum_{i=1}^n \psi(\widehat{\theta}_n, X_i) = \max_{a \in \Theta} \sum_{i=1}^n \psi(a, X_i)$$

Fonction de vraisemblance

- La famille $\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ est dominée par une mesure σ-finie μ. On se donne, pour $\theta \in \Theta$,

$$f(\theta, x) = \frac{d\,\mathbb{P}_\theta}{d\mu}(x),\ x \in \mathcal{X}$$

Définition

La fonction de vraisemblance du n-échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ associée à la famille de densité $\{f(\theta, \cdot) : \theta \in \Theta\}$ est

$$\boxed{\theta \in \Theta \mapsto \mathcal{L}_n(\theta, X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta, X_i)}$$

Estimateur du maximum de vraisemblance

Situation :

- $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta$, $\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ dominée, $\Theta \subset \mathbb{R}^d$
- $\theta \mapsto \mathcal{L}_n(\theta, X_1, \ldots, X_n)$ vraisemblance associée

Définition

On appelle estimateur du maximum de vraisemblance *tout estimateur* $\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}}$ *satisfaisant*

$$\mathcal{L}_n(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}}, X_1, \ldots, X_n) = \max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}_n(\theta, X_1, \ldots, X_n)$$

Aujourd'hui

l'EMV est un M-estimateur

Asymptotique des Z- et M- estimateurs et de l'EMV

Modèles réguliers et information de Fisher

- Construction de l'information de Fisher
- Cadre général et interprétation géométrique
- Exemples, applications

l'EMV est un M-estimateur

- Une inégalité de convexité : μ mesure σ-finie sur $\mathbb{R}$; f, g deux densités de probabilités par rapport à μ. Alors

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}} f(x) \log f(x) \mu(dx) \geq \int_{\mathbb{R}} f(x) \log g(x) \mu(dx)}$$

(si les intégrales sont finies) avec égalité ssi $f = g$ μ-pp.

- Preuve : à montrer

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) \log \frac{g(x)}{f(x)} \mu(dx) \leq 0$$

(convention $\log(0) = -\infty$)

Une inégalité de convexité

- On a $\log(1+x) \leq x$ pour $x \geq -1$ avec égalité ssi $x = 0$.
- Donc
$$\log \frac{g(x)}{f(x)} = \log\left(1 + (\frac{g(x)}{f(x)} - 1)\right) \leq \frac{g(x)}{f(x)} - 1$$
(avec égalité ssi $f(x) = g(x)$).
- Finalement
$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x) \log \frac{g(x)}{f(x)} \mu(dx) &\leq \int_{\mathbb{R}} f(x) \Big(\frac{g(x)}{f(x)} - 1\Big) \mu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\mu(dx) - \int_{\mathbb{R}} f(x)\mu(dx) \\ &= 0\end{aligned}$$

Conséquence pour l'EMV

- On pose

$$\boxed{\psi(a,x) := \log f(a,x), \quad a \in \Theta,\ x \in \mathbb{R}}$$

(convention $\psi(a,x) = -\infty$ quand $f(a,x) = 0$)

- La fonction

$$a \in \Theta \mapsto \mathbb{E}_\theta\left[\psi(a,X)\right] = \int_{\mathbb{R}} \log f(a,x) f(\theta,x)\mu(dx)$$

a un maximum en $a = \theta$ d'après l'inégalité de convexité

- Le M-estimateur associé à ψ maximise la fonction

$$a \mapsto \sum_{i=1}^{n} \log f(a, X_i) = \ell_n(a, X_1, \ldots, X_n)$$

c'est-à-dire la log-vraisemblance, donc

$$\boxed{\text{l'estimateur du maximum de vraisemblance est un } M\text{-estimateur}}$$

- Si la fonction $\theta \mapsto \log f(\theta, \cdot)$ est régulière, l'EMV est aussi un Z-estimateur associé à la fonction

$$\phi(\theta, x) = \partial_\theta \log f(\theta, x) = \frac{\partial_\theta f(\theta, x)}{f(\theta, x)}, \ \theta \in \Theta, x \in \mathbb{R}$$

à condition que le maximum de la log-vraisemblance n'est pas atteint sur la frontière de Θ.

Asymptotique des Z et M-estimateurs et de l'EMV

Modèle d'échantillonage : $(X_n)_n$ suite $\overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta \in \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$. Soit $(\hat{\theta}_n)_n$ un estimateur. On dit que :

1. $\widehat{\theta}_n$ est consistant quand pour tout $\theta \in \Theta$, sous $\mathbb{P}_\theta$,

$$\boxed{\widehat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \theta}$$

   ($\widehat{\theta}_n$ est fortement consistant quand la cv est p.s.)

2. $\widehat{\theta}_n$ est asymptotiquement normal quand, pour tout $\theta \in \Theta$, sous $\mathbb{P}_\theta$, il existe une suite croissante de réels positifs $(a_n) \uparrow \infty$ et V_θ une variable aléatoire Gaussienne centrée telles que :

$$\boxed{a_n\left(\widehat{\theta}_n - \theta\right) \xrightarrow{d} V_\theta}$$

   Quand $V_\theta \sim \mathcal{N}(0, v(\theta))$, $v(\theta)$ est appelée la variance asymptotique ; $1/a_n$ est la vitesse de convergence asymptotique (généralement, $a_n = \sqrt{n}$)

Asymptotique des Z- et M-estimateurs

- Problème général délicat. Dans ce cours : conditions suffisantes
- résultats établis pour $\Theta \subset \mathbb{R}$ mais généralisable à $\mathbb{R}^d$
- application directe à l'EMV (vu comme un M-estimateur)

Consistance des Z-estimateurs

- Situation : on observe $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta$.
- $\phi : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- Loi des grands nombres : pour tout $\theta, a \in \Theta$, sous $\mathbb{P}_\theta$,

$$Z_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi(a, X_i) \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} Z(a, \theta) \ = \mathbb{E}_\theta \left[\phi(a, X)\right]$$

qui s'annule en $a = \theta$

- à montrer : pour tout $\theta \in \Theta$, sous $\mathbb{P}_\theta$,

$$\widehat{\theta}_n \text{ (zéro de } Z_n(\cdot)) \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \theta \text{ (zéro de } Z(\cdot, \theta))$$

Consistance des Z-estimateurs

Proposition

On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$:

a) $\sup_{a\in\Theta} |Z_n(a) - Z(a,\theta)| \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} 0$,

b) $\forall \varepsilon > 0, \; \inf_{|a-\theta|\geq\varepsilon} |Z(a,\theta)| > 0$

alors tout Z-estimateur $\widehat{\theta}_n$ (càd tq $Z_n(\widehat{\theta}_n) = 0$) est consistant.

1. "a)" se montre grâce aux techniques de processus empiriques
2. "b)" est une condition (déterministe) sur le zéro θ de $Z(\cdot,\theta)$

Consistance des M-estimateurs

- Situation : on observe $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta$
- $\psi : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction de contraste
- Loi des grands nombres : pour tout $\theta, a \in \Theta$, sous $\mathbb{P}_\theta$,

$$M_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \psi(a, X_i) \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} M(a, \theta) \ = \mathbb{E}_\theta \left[\psi(a, X) \right]$$

  qui atteint son maximum en $a = \theta$
- à montrer : pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\widehat{\theta}_n = \arg\max_{a \in \Theta} M_n(a) \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \arg\max_{a \in \Theta} \mathbb{E}_\theta \left[\psi(a, X) \right] = \theta$$

Consistance des M-estimateurs

Proposition

On suppose que pour tout $\theta \in \Theta$:

a) $\sup_{a \in \Theta} |M_n(a) - M(a, \theta)| \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} 0$,

b) $\forall \varepsilon > 0, \ \sup_{|a-\theta| \geq \varepsilon} M(a, \theta) < M(\theta, \theta)$

alors tout M-estimateur $\widehat{\theta}_n \in \arg\max_{a \in \Theta} M_n(a)$ est consistant.

1. "a)" se montre grâce aux techniques de processus empiriques
2. "b)" est une condition sur le maximum de la fonction de contraste

- Situation : $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta$ pour $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$
- $\widehat{\theta}_n$: Z-estimateur associé à $\phi : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ càd

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \phi(\widehat{\theta}_n, X_i) = 0}$$

- Sous certaines conditions $\widehat{\theta}_n$ est consistant. Maintenant : est-il asymptotiquement normal ? :
  1. Pour quelle vitesse de convergence ?
  2. Pour quelle variance asymptotique ?

Normalité asymptotique des Z-estimateurs : principe

- Principe. Développement de Taylor autour de θ :

$$0 = Z_n(\widehat{\theta}_n) = Z_n(\theta) + (\widehat{\theta}_n - \theta)Z_n'(\theta) + \frac{1}{2}(\widehat{\theta}_n - \theta)^2 Z''(\widetilde{\theta}_n)$$

- On a approximativement (en "négligeant" le reste) :

$$\boxed{\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \approx \frac{-\sqrt{n}Z_n(\theta)}{Z_n'(\theta)}}$$

Normalité asymptotique des Z-estimateurs : principe

- Convergence du numérateur : par le TCL (sous $\mathbb{P}_\theta$)

$$\sqrt{n}Z_n(\theta) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\phi(\theta, X_i) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \mathbb{E}_\theta\left[\phi(\theta, X)^2\right]\right)$$

  si $\mathbb{E}_\theta\left[\phi(\theta, X)\right] = 0$ et $\mathbb{E}_\theta\left[\phi(\theta, X)^2\right] < +\infty$.

- Convergence du dénominateur (sous $\mathbb{P}_\theta$)

$$Z_n'(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\partial_1\phi(\theta, X_i) \xrightarrow{\mathbb{P}_\theta} \mathbb{E}_\theta\left[\partial_1\phi(\theta, X)\right]$$

  $\neq 0$ (à supposer).

- $+$ hypothèses techniques pour contrôler le reste (besoin de la consistance de $\widehat{\theta}_n$).

Normalité asymptotique des Z-estimateurs

Theorem

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- *le Z-estimateur $\widehat{\theta}_n$ associé à ϕ est consistant*
- *pour tout $\theta \in \Theta$, $\mathbb{E}_\theta\left[\phi(\theta, X)\right] = 0$,*

$$\mathbb{E}_\theta\left[\phi(\theta, X)^2\right] < +\infty \text{ et } \mathbb{E}_\theta\left[\partial_1\phi(\theta, X)\right] \neq 0$$

- *(Contrôle reste) pour tout $\theta \in \Theta$, pour tout a dans un voisinage de θ,*

$$|\partial_1^2\phi(a, x)| \leq g(x) \text{ où } \mathbb{E}_\theta\left[g(X)\right] < +\infty.$$

Alors, pour tout $\theta \in \Theta$, sous $\mathbb{P}_\theta$,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbb{E}_\theta[\phi(\theta, X)^2]}{\left(\mathbb{E}_\theta[\partial_1\phi(\theta, X)]\right)^2}\right)$$

- Situation : $X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta$ pour $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$
- $\widehat{\theta}_n$: M-estimateur associé à $\psi : \Theta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ càd

$$\boxed{\widehat{\theta}_n \in \arg\max_{a \in \Theta} \sum_{i=1}^{n} \psi(a, X_i)}$$

- Sous certaines conditions, les M-estimateurs sont des Z-estimateurs associés à

$$\boxed{\phi(a, x) = \partial_1 \psi(a, x)}$$

On applique le théorème de la normalité asymptotique des Z-estimateurs aux M-estimateurs.

Normalité asymptotique des M-estimateurs

Theorem

Soit Θ un ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que :

- *le M-estimateur $\widehat{\theta}_n$ associé à ψ est consistant*
- *pour tout $\theta \in \Theta$, $\mathbb{E}_\theta\left[\partial_1 \psi(\theta, X)\right] = 0$,*

$$\mathbb{E}_\theta\left[\partial_1 \psi(\theta, X)^2\right] < +\infty \text{ et } \mathbb{E}_\theta\left[\partial_1^2 \psi(\theta, X)\right] \neq 0$$

- *pour tout $\theta \in \Theta$, pour tout a dans un voisinage de θ,*

$$|\partial_1^3 \psi(a, x)| \leq g(x) \text{ où } \mathbb{E}_\theta\left[g(X)\right] < +\infty.$$

Alors, pour tout $\theta \in \Theta$, sous $\mathbb{P}_\theta$,

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{\mathbb{E}_\theta[\partial_1 \psi(\theta, X)^2]}{\left(\mathbb{E}_\theta[\partial_1^2 \psi(\theta, X)]\right)^2}\right)$$

Normalité asymptotique de l'EMV : principe

- Situation : $X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta$ pour $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$
- $\{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ est dominé par μ et la vraisemblance associée est

$$\theta \mapsto \mathcal{L}_n(\theta, X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} f(\theta, X_i)$$

- l'EMV est

$$\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}} \in \arg\max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}_n(\theta, X_1, \dots, X_n)$$

- On pose

$$\boxed{\psi(a,x) := \log f(a,x), \quad a \in \Theta, \; x \in \mathbb{R}}$$

(convention $\log 0 = -\infty$)

- La fonction

$$a \mapsto \mathbb{E}_\theta\left[\psi(a,X)\right] = \int_{\mathbb{R}} \log f(a,x) f(\theta,x)\mu(dx)$$

a un maximum en $a = \theta$.

Donc l'EMV est un M-estimateur. On peut alors appliquer le théorème de normalité asymptotique des M-estimateurs.

Normalité asymptotique de l'EMV : principe

Sous certaine conditions, on a

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}} - \theta \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, v(\theta)\right)$$

où la variance asymptotique est

$$v(\theta) = \frac{\mathbb{E}_{\theta}[\partial_1 \psi(\theta, X)^2]}{\left(\mathbb{E}_{\theta}[\partial_1^2 \psi(\theta, X)]\right)^2}$$

qui se simplifie quand $\psi(a, x) = \log f(a, x)$ en

$$\boxed{v(\theta) = \frac{1}{\mathbb{I}(\theta)} \text{ où } \mathbb{I}(\theta) = \mathbb{E}_{\theta}\left[(\partial_1 \log f(\theta, X))^2\right]}$$

car

$$\mathbb{E}_{\theta}\left[(\partial_1^2 f(\theta, X))/f(\theta, X)\right] = 0$$

Normalité asymptotique de l'EMV : principe

Dans un modéle d'échantilllonage $\{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\}$ dominé par μ, de densités

$$\frac{d\,\mathbb{P}_\theta}{d\mu}(x) = f(\theta, x)$$

on définit

$$\ell(\theta, x) = \log f(\theta, x)$$

avec la convention $(\log 0 = -\infty)$ et quand $\ell(\cdot, x)$ est dérivable pour μ-p.t. x, on appelle :

1. fonction de score : à $x \in \mathbb{R}$ fixé,

$$\theta \mapsto \partial_1 \ell(\theta, x)$$

2. on appelle information de Fisher en $\theta \in \Theta$,

$$\mathbb{I}(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[(\partial_1 \ell(\theta, X))^2\right]$$

Normalité asymptotique de l'EMV : principe

On a donc "sous certaines hypothèses" que :

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\,\mathtt{mv}} - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\mathbb{I}(\theta)}\right)$$

Les hypothèses suffisantes pour assurer la normalité asymptotique de l'EMV de variance asymptotique $\mathbb{I}(\theta)^{-1}$ sont à l'origine de la définition d'un modéle régulier.

Conclusion : L'étude de la normalité asymptotique des EMV nous améne à introduire les notions suivantes :

1. le score
2. l'information de Fisher
3. un modéle régulier

Régularité d'un modèle statistique et information

- Cadre simplificateur : modèle dominé (par μ)

$$X_1, \ldots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta$$

dans la famille $\left\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\right\}$ avec $\Theta \subset \mathbb{R}$ (pour simplifier).

- Notation :

$$f(\theta, x) = \frac{d\,\mathbb{P}_\theta}{d\mu}(x), \quad x \in \mathbb{R}, \theta \in \Theta.$$

- Hypothèse : la quantité

$$\boxed{\mathbb{I}(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\partial_1 \log f(\theta, X)\right)^2\right]}$$

est bien définie $\mathbb{P}_\theta$-p.s..

Information de Fisher

Définition

$\mathbb{I}(\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\left(\partial_1 \log f(\theta, X)\right)^2\right]$ *s'appelle l'information de Fisher de la famille* $\{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\}$ *au point* θ*.*

- L'information de Fisher ne dépend pas de la mesure dominante μ
- Le cadre d'intérêt est celui où

$$0 < \mathbb{I}(\theta) < +\infty.$$

- $\mathbb{I}(\theta)$ quantifie « l'information » qu'apporte chaque observation X_i sur le paramètre θ.
- on a $\mathbb{P}_\theta\left[f(\theta, X) > 0\right] = 1$, donc la quantité $\log f(\theta, X)$ est bien définie.

Modèle régulier

Définition

La famille de densités $\{f(\theta,\cdot), \theta \in \Theta\}$*, par rapport à la mesure dominante* μ*,* $\Theta \subset \mathbb{R}$ *ouvert, est régulière si*

- $\{f(\theta,\cdot) > 0\} = \{f(\theta',\cdot) > 0\}$, *$\mu$-p.p.* $\forall \theta, \theta' \in \Theta$
- *μ-p.p.* $\theta \mapsto f(\theta,\cdot)$, $\theta \mapsto \log f(\theta,\cdot)$ *sont* $\mathcal{C}^2$
- $\forall \theta \in \Theta, \exists \mathcal{V}_\theta \subset \Theta$ *t.q. pour* $a \in \mathcal{V}_\theta$

$$|\partial_a^2 \log f(a,x)| + |\partial_a \log f(a,x)| + \big(\partial_a \log f(a,x)\big)^2 \leq g(x)$$

où $\int_{\mathbb{R}} g(x) \sup_{a \in \mathcal{V}(\theta)} f(a,x)\mu(dx) < +\infty$

- *L'information de Fisher est non-dégénérée :*

$$\forall \theta \in \Theta, \quad \mathbb{I}(\theta) > 0$$

Résultat principal

Theorem

Dans le modèle d'échantillonnage associé à un modèle régulier on a : pour tout $\theta \in \Theta$,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n^{\mathtt{mv}} - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\mathbb{I}(\theta)}\right)$$

Information de Fisher dans le modèle d'échantillonnage

Dans le modèle d'échantillonnage (sur $\mathbb{R}$) dominé (par μ), on observe

$$X_1, \dots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} \mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$$

et on note les densités (pour tout $\theta \in \Theta$, $x \in \mathbb{R}$)

$$\frac{d\,\mathbb{P}_\theta}{d\mu}(x) = f(\theta, x)$$

L'expérience statistique associée est

$$\mathcal{E}^n = \left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \{\mathbb{P}_\theta^{\otimes n}, \theta \in \Theta\}\right)$$

qui est dominée par $\mu^{\otimes n}$, de densité : $\forall z = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{f_n(\theta, z) = \frac{d\,\mathbb{P}^Z}{d\mu^{\otimes n}}(z) = \prod_{i=1}^n f(\theta, x_i)}$$

où $Z = (X_1, \dots, X_n)$ est une observation de l'expérience $\mathcal{E}^n$.

L'information de Fisher contenue dans une observation $Z = (X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathcal{E}^n$ en θ est

$$\boxed{\mathbb{I}_n(\theta) = \mathbb{I}(\theta|\mathcal{E}^n) = \mathbb{E}_\theta \left[(\partial_1 \log f_n(\theta, Z))^2 \right]}$$

Par ailleurs, pour une seule observation X_1 de l'expérience

$$\mathcal{E} = \big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \{\mathbb{P}_\theta, \theta \in \Theta\} \big),$$

l'information de Fisher est

$$\mathbb{I}(\theta) = \mathbb{I}(\theta|\mathcal{E}) = \mathbb{E}_\theta \left[(\partial_1 \log f(\theta, X_1))^2 \right]$$

Theorem

$$\mathbb{I}(\theta \,|\, \mathcal{E}^n) = n\mathbb{I}(\theta \,|\, \mathcal{E})$$

Le cas multidimensionnel

Définition

Soit $Z \sim \mathbb{P}_\theta$ avec $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ de densité $f(\theta, \cdot)$. La matrice d'information de Fisher en θ est

$$\mathbb{I}(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left[\nabla_\theta \log f(\theta, Z) \nabla_\theta \log f(\theta, Z)^T \right]$$

- $\mathbb{I}(\theta)$ est une matrice $d \times d$ symétrique positive
- Dans le modèle d'échantillonage dominé, on note $\mathbb{I}(\theta)$ l'information de Fisher pour une observation X_1, sous des hypothèses de régularité du modèle, on a

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\,\mathtt{mv}} - \theta \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\left(0, \mathbb{I}(\theta)^{-1}\right)$$

Région de confiance asymptotique pour l'EMV (1/2)

Dans le modèle d'échantillonnage dominé régulier tel que l'information de Fisher (pour une observation X_1)

$$\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{I}(\theta) \in \mathbb{R}^{d \times d}$$

est continue, on peut appliquer le lemme de Slutsky :

$$\sqrt{n}\mathbb{I}(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}})^{1/2}\left(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}} - \theta\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(0, I_d\Big)$$

où I_d est la matrice identité de $\mathbb{R}^{d \times d}$.
Ainsi, pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$ (mesurable), quand $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{n}\mathbb{I}(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}})^{1/2}\left(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}} - \theta\right) \in E\right] \longrightarrow \mathbb{P}[G \in E]$$

où $G \sim \mathcal{N}(0, I_d)$.

Région de confiance asymptotique pour l'EMV (2/2)

Pour $B_2^d = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 \leq 1\}$, $G \sim \mathcal{N}(0, I_d)$ et $c > 0$, on a :

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{n}\mathbb{I}(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}})^{1/2}\left(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}} - \theta\right) \in cB_2^d\right] \longrightarrow \mathbb{P}[\|G\|_2 \leq c]$$

Comme $\|G\|_2^2$ suit une loi du $\chi^2(d)$ ("khi2 à d degrés de liberté"), on a pour tout $\alpha \in (0,1)$, quand $n \to \infty$,

$$\mathbb{P}\left[\theta \in \mathcal{I}_{n,\alpha}\right] \longrightarrow 1 - \alpha$$

où

$$\boxed{\mathcal{I}_{n,\alpha} = \widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}} + \frac{q_{1-\alpha}^{\chi^2(d)}}{\sqrt{n}}\mathbb{I}(\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}})^{-1/2} B_2^d}$$

C'est une ellipse centrée en $\widehat{\theta}_{\mathrm{n}}^{\mathtt{mv}}$.

Formules de calcul de l'information de Fisher

Proposition

Dans un modèle régulier :

$$\begin{aligned}
\mathbb{I}(\theta) &= \mathbb{E}_\theta\left[(\partial_\theta \log f(\theta, X))^2\right] \\
&= -\,\mathbb{E}_\theta\, \partial_\theta^2 \log f(\theta, X) \\
&= -\partial_a^2 \mathbb{D}(a, \theta)\Big|_{a=\theta}
\end{aligned}$$

où $\mathbb{D}(a, \theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\log f(a, X)\right]$.

Interprétation géométrique

- On pose $\mathbb{D}(a,\theta) = \mathbb{E}_\theta\left[\log f(a,X)\right]$. On a (par l'inégalité d'entropie) que

$$\begin{aligned}\mathbb{D}(a,\theta) &= \int_{\mathbb{R}} \log f(a,x) f(\theta,x)\mu(dx)\\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \log f(\theta,x) f(\theta,x)\mu(dx) = \mathbb{D}(\theta,\theta).\end{aligned}$$

- On a

$$\boxed{\mathbb{I}(\theta) = -\partial_a^2 \mathbb{D}(a,\theta)\big|_{a=\theta}}$$

  - $\mathbb{I}(\theta)$ est petite : le rayon de courbure de $a \mapsto \mathbb{D}(a,\theta)$ est grand dans un voisinage de θ : la stabilisation d'un maximum empirique (l'EMV) est plus difficile, rendant moins précis l'estimation.
  - $\mathbb{I}(\theta)$ est grande : le rayon de courbure est petit et le maximum de l'EMV est mieux localisé.

Exercices classiques

Savoir calculer : 1) la vraisemblance, 2) l'EMV, 3) l'information de Fisher, 4) le comportement asymptotique de l'EMV, 5) un intervalle de confiance pour θ ; pour le modèle d'échantillonnage de loi :

- Bernoulli $\mathcal{B}(\theta)$
- Normal $\mathcal{N}(m, v)$
- Uniforme $\mathcal{U}([a, b])$
- Poisson $\mathcal{P}(\theta)$
- L'estimation du paramètre d'une loi exponentielle avec ou sans censure.
- modèle de régression

application : efficacité à un pas

- Dans un modèle régulier, le calcul numérique de l'EMV peut être difficile à réaliser.
- Si l'on dispose d'un estimateur $\widehat{\theta}_n$ asymptotiquement normal et si les évaluations

$$\ell_n'(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \partial_1 \log f(\theta, X_i), \quad \ell_n''(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \partial_1^2 \log f(\theta, X_i)$$

sont faciles, alors on peut corriger $\widehat{\theta}_n$ de sorte d'avoir le même comportement asymptotique que l'EMV :

$$\boxed{\widetilde{\theta}_n = \widehat{\theta}_n - \frac{\ell_n'(\widehat{\theta}_n)}{\ell_n''(\widehat{\theta}_n)}} \quad \text{(algorithme de Newton)}$$

satisfait

$$\boxed{\sqrt{n}\big(\widetilde{\theta}_n - \theta\big) \xrightarrow{d} \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{\mathbb{I}(\theta)}\Big)}$$