

# Statistiques mathématiques : Cours 6

Guillaume Lécué

21 septembre 2017

# Aujourd'hui

Introduction aux tests

Hypothèse simple contre alternative simple

Lemme de Neyman-Pearson

Tests gaussiens

Tests sur la moyenne

Tests sur la variance

# Exemple introductif

- ▶ On observe 10 lancers d'une pièce de monnaie et on obtient le résultat suivant :

$(P, P, F, F, P, F, P, P, F, P)$

Question : La pièce est-elle équilibrée ?

- ▶ Répondre à cette question revient à prendre une décision :

$\varphi = \varphi(P, P, F, F, P, F, P, P, F, P)$

$= \begin{cases} \text{on accepte l'hypothèse « la pièce est équilibrée »} \\ \text{on rejette l'hypothèse « la pièce est équilibrée »} \end{cases}$

## Exemple introductif : modélisation et définition des hypothèses

- ▶ Modélisation : On modélise ces observations par l'expérience statistique

$$\mathcal{E}^{10} = (\{0, 1\}^{10}, \mathcal{P}(\{0, 1\}^{10}), \{\mathbb{P}_\theta^{10}, \theta \in [0, 1]\}),$$

avec  $(P = 1, F = 0)$

$$\mathbb{P}_\theta^{10} = (\theta\delta_1 + (1 - \theta)\delta_0)^{\otimes 10}$$

- ▶ et on "traduit" la question en termes mathématiques : résoudre le problème de test suivant

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2} \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta \neq \frac{1}{2}$$

### Définition

L'hypothèse  $H_0$  est appelée *hypothèse nulle*.

L'hypothèse  $H_1$  est appelée *hypothèse alternative*.

# Définitions

## Définition

1. Soit  $Z$  une observation de l'expérience statistique  $\mathcal{E} = (\mathfrak{Z}, \mathcal{Z}, \{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta\})$ .
2. Soit  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  une partition de l'espace des paramètres.
3. Soit le problème de test

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

Un *test* ou *régle de décision* est une statistique de la forme

$$\varphi(Z) = I(Z \in \mathcal{R}) = \begin{cases} H_0 & \text{"on accepte"} \\ H_1 & \text{"on rejette"} \end{cases}$$

$\mathcal{R} \subset \mathfrak{Z}$  est appelée *zone de rejet* ou *région critique*.

## Exemple introductif : construction d'un test (1/2)

- ▶  $Z = (X_1, \dots, X_{10})$  : observation dans le modèle d'échantillonnage de Bernoulli  $\{\mathbb{P}_\theta : 0 < \theta < 1\}$  où  $\mathbb{P}_\theta = \theta\delta_1 + (1 - \theta)\delta_0$
- ▶ on regarde le problème de test suivant :

$$H_0 : \theta = \frac{1}{2} \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta \neq \frac{1}{2}$$

- ▶ on construit un **test** à partir de l'EMV  $\hat{\theta}_n^{\text{mv}} = \bar{X}_n = \bar{X}_{10}$  ( $n = 10$ ) et d'un seuil  $t_0$  donné :

$$\varphi(Z) = I(Z \in \mathcal{R}) = \begin{cases} H_0 & \text{quand } \left| \hat{\theta}_n^{\text{mv}} - \frac{1}{2} \right| \leq t_0 \\ H_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- ▶ la **zone de rejet** est ici

$$\mathcal{R} = \left\{ z \in \{0, 1\}^{10} : \left| \hat{\theta}_n^{\text{mv}}(z) - \frac{1}{2} \right| > t_0 \right\}$$

## Exemple introductif : construction d'un test (2/2)

- ▶ Dans le test précédent

$$\varphi(Z) = I(Z \in \mathcal{R}) = \begin{cases} H_0 & \text{quand } \left| \hat{\theta}_n^{\text{mv}} - \frac{1}{2} \right| \leq t_0 \\ H_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

l'EMV  $\hat{\theta}_n^{\text{mv}}$  a été utilisé pour construire le test. C'est une approche classique : ici l'EMV joue le rôle de **statistique de test**

- ▶ On peut calculer l'EMV sur les données :  $\hat{\theta}_n^{\text{mv}} \stackrel{\text{exemple}}{=} 0,6$  et donc prendre une décision.

Question : comment choisir le seuil  $t_0$  ?

- ▶ y-a-t'il un meilleur choix de test ? une meilleure statistique de test ?

# Les deux types d'erreurs de décision

$Z$  une observation,  $\Theta = \Theta_0 \cup \Theta_1$  une partition et le problème de test

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \theta \in \Theta_1$$

## Définition

Soit  $\varphi$  un test de zone de rejet  $\mathcal{R}$  (càd  $\varphi(z) = I(z \in \mathcal{R})$ )

- ▶ L'erreur de première espèce (*rejeter à tort*)

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta[Z \in \mathcal{R}]$$

- ▶ La fonction d'erreur de seconde espèce (*accepter à tort*)

$$\theta \in \Theta_1 \mapsto \mathbb{P}_\theta[Z \notin \mathcal{R}] = 1 - \pi_\varphi(\theta)$$

où  $\pi_\varphi(\theta) = \mathbb{P}_\theta[Z \in \mathcal{R}]$  est la *fonction puissance* du test

Note : "rejeter" = rejeter  $H_0$ ; "accepter" = accepter  $H_0$



## Exemple introductif : les deux types d'erreurs

Le test  $\varphi(z) = I(|\hat{\theta}_n^{\text{mv}}(z) - 0.5| > t_0)$  peut faire deux types d'erreurs :

- ▶ rejeter à tort :

**Rejeter** ( $\varphi(Z) = H_1$ ) **alors que**  $\theta = \frac{1}{2} \in \Theta_0 = \{\frac{1}{2}\}$

dans ce cas, l'**erreur de première espèce** est

$$\mathbb{P}_{0.5}[|\hat{\theta}_n^{\text{mv}}(Z) - 0.5| > t_0]$$

- ▶ accepter à tort :

**Accepter** ( $\varphi(Z) = H_0$ ) **alors que**  $\theta \neq \frac{1}{2}$

dans ce cas, la fonction d'**erreur de seconde espèce** est

$$\theta \neq 1/2 \mapsto \mathbb{P}_\theta[|\hat{\theta}_n^{\text{mv}}(Z) - 0.5| \leq t_0]$$

et la **fonction puissance** est  $\theta \neq 1/2 \mapsto \mathbb{P}_\theta[|\hat{\theta}_n^{\text{mv}}(Z) - 0.5| > t_0]$   
(rejeter à raison).

# Niveau asymptotique d'un test

## Définition

Dans le modèle d'échantillonnage, on construit une suite de test  $(\varphi_n)$  (où  $n$  est le nombre d'observations). Soit  $\alpha \in (0, 1)$ . On dit que  $(\varphi_n)$  est de **niveau asymptotique  $\alpha$**  quand

$$\forall \theta \in \Theta_0, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_\theta[\varphi_n = H_1] \leq \alpha$$

1. on veut s'assurer qu'asymptotiquement la probabilité de rejeter à tort est moins que  $\alpha$
2. idéalement, on aimerait pouvoir fixer un niveau pour les deux types d'erreurs (1ère et 2-ième) mais ce n'est pas possible en général. On va donc privilégier un contrôle de l'erreur de 1ère espèce en construisant des tests de niveau asymptotique donné : **introduction d'une dissymétrie**

## Exemple introductif : étude asymptotique du test

Sous  $H_0$  (càd  $\theta = 1/2$ ) :

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{\text{mv}} - 0.5) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1/4)$$

en particulier, pour  $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,

$$\mathbb{P}_{0.5}[|\hat{\theta}_n^{\text{mv}} - 0.5| > t_{n,\alpha}] \longrightarrow \mathbb{P}[|g| > q_{1-\alpha/2}] = \alpha$$

où, pour le quantile  $q_{1-\alpha/2}$  d'ordre  $1 - \alpha/2$  de  $g$

$$t_{n,\alpha} = \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{n}}$$

Sous  $H_1$  (càd  $\theta \neq 1/2$ ) : pour tout  $\theta \in \Theta_0^c = \Theta_1 = (0, 1) - \{0.5\}$ ,

$$\sqrt{n}|\hat{\theta}_n^{\text{mv}} - 0.5| \xrightarrow{p.s.} +\infty$$

(la puissance tend vers 1)

## Exemple introductif : prise de décision

Les données d'origines étaient :

$$z = (P, P, F, F, P, F, P, P, F, P)$$

l'EMV vaut donc  $\hat{\theta}_{10}^{\text{mv}}(z) = 0.6$  et, pour un  $\alpha \in (0, 1)$  donné le test est

$$\varphi(Z) = \begin{cases} H_0 & \text{quand } \left| \hat{\theta}_{10}^{\text{mv}}(Z) - \frac{1}{2} \right| \leq t_{10, \alpha} = \frac{q_{1-\alpha/2}}{2\sqrt{10}} \\ H_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Par exemple :

1. pour  $\alpha = 5\%$ , on a  $q_{1-\alpha/2} \approx 1.96$  et  $t_{10, \alpha} \approx 0.31$  alors comme  $\left| \hat{\theta}_{10}^{\text{mv}}(z) - \frac{1}{2} \right| = 0.1 \leq t_{10, 5\%}$ , on **accepte**
2. pour  $\alpha = 10\%$ , on a  $q_{1-\alpha/2} \approx 1.64$ , alors  $t_{10, \alpha} \approx 0.26$  alors comme  $\left| \hat{\theta}_{10}^{\text{mv}}(z) - \frac{1}{2} \right| = 0.1 \leq t_{10, 10\%}$ , on **accepte**

## Exemple introductif : introduction de la $p$ -value

Le choix du niveau  $\alpha$  est arbitraire. Dans l'exemple précédent, on va

- ▶ accepter tant que  $q_{1-\alpha/2} \geq 2\sqrt{10} * \left| \hat{\theta}_{10}^{mv} - \frac{1}{2} \right|$
- ▶ rejeter dès que  $q_{1-\alpha/2} \leq 2\sqrt{10} * \left| \hat{\theta}_{10}^{mv} - \frac{1}{2} \right|$

La **valeur limite de  $\alpha$  pour laquelle la décision bascule** càd le  $\alpha$  tel que

$$q_{1-\alpha/2} = 2\sqrt{10} * \left| \hat{\theta}_{10}^{mv} - \frac{1}{2} \right|$$

est appelée la **p-value**.

Ici la p-value est donnée par l'équation (en  $\alpha$ )

$$q_{1-\alpha/2} = 2\sqrt{10} * 0.1 \approx 0.63$$

càd  $\alpha = \text{p-value} \approx 0.525$ .

# p-value : introduction formelle

## Définition

Soit  $\varphi_\alpha$  un test de niveau asymptotique  $\alpha$  et de zone de rejet  $\mathcal{R}_\alpha$ . On appelle **p-value** du test la statistique

$$p\text{-value}(Z) = \inf(\alpha \in (0, 1) : Z \in \mathcal{R}_\alpha)$$

- ▶ c'est le seuil critique où la décision bascule :

$$\varphi_\alpha(Z) = \begin{cases} H_0 & \text{quand } \alpha \leq p\text{-value}(Z) \\ H_1 & \text{quand } \alpha > p\text{-value}(Z) \end{cases}$$

- ▶ la **p-value** quantifie le niveau de confiance sur l'acceptation (de  $H_0$ )

## p-value : interprétation

p-value	niveau de confiance sur l'acceptation	décision
$p < 0.01$	très faible	<i>rejet</i> (avec confiance)
$0.01 \leq p < 0.05$	faible	<i>rejet</i>
$0.05 \leq p < 0.1$	fort	<i>acceptation</i>
$0.1 \leq p$	très fort	<i>acceptation</i> (avec confiance)

- ▶ forte p-value : le test ne permet pas de rejeter  $H_0$
- ▶ petite p-value : même si on prend un niveau de test très petit, le test rejettera  $H_0$  (alors qu'on a une forte aversion au risque de 1ère espèce, c-à-d de rejeter à tort)
- ▶ dans l'exemple, on a p-value  $\approx 0.525$ , on va donc accepter (avec confiance)

# Signification de l'acceptation

Accepter  $H_0$  ne signifie pas que  $H_0$  est vraie

1. par défaut, on accepte  $H_0$  à moins qu'on apporte une "preuve" que  $H_0$  n'est pas acceptable
2. *Accepter* signifie seulement qu'on n'a pas pu apporter une preuve que  $H_0$  n'est pas acceptable : on préférera dire que le test ne permet pas de rejeter plutôt que "on accepte".
3. une *preuve* est l'observation d'un événement "rare" sous  $H_0$  : "sous  $H_0$ , la statistique de test prend une valeur qui peut être considérée comme rare" est une preuve de rejet
4. la "rareté" d'un événement est fixée par le niveau (asymptotique)  $\alpha$
5. si dans l'exemple, le vrai  $\theta = 0.5 + 10^{-10}$ , il est fort probable qu'on ne rejette pas alors que  $H_0$  est fausse.



# Signification du rejet

## Seul le rejet est informatif

1. *rejeter* signifie qu'on a apporté la preuve que  $H_0$  ne peut pas être acceptée
2. à un niveau  $\alpha$  fixé, on rejette quand la valeur prise par la statistique de test est rare étant connue sa loi sous  $H_0$  (déclarer un événement rare dépend du niveau  $\alpha$ )
3. en général, **sous  $H_0$** , on connaît la loi asymptotique de la statistique de test (ex. :  $\hat{\theta}_n^{\text{mv}} \sim \mathcal{N}(0.5, (4n)^{-1})$ ) donc si la valeur prise par cette statistique en les observations :  $\hat{\theta}_n^{\text{mv}}(z)$  est peu vraisemblable pour sa loi limite (ex. :  $\hat{\theta}_n^{\text{mv}} = 0.9$ ) alors on rejettera =  
on aura apporté une preuve que  $H_0$  n'est pas acceptable
4. la  $p$ -value mesure le niveau de rareté de la valeur observée de la statistique de test pour la loi de la statistique de test sous  $H_0$ .

# Choix des hypothèses : dissymétrie

le choix des hypothèses est important

1. Pour une partition  $\Theta = A \cup B$ , il n'y a pas équivalence entre les deux problèmes de test

$$H_0 : \theta \in A \text{ contre } H_1 : \theta \in B$$

et

$$H_0 : \theta \in B \text{ contre } H_1 : \theta \in A$$

2. on choisit les hypothèses en fonction de l'intérêt qu'on porte au problème : l'hypothèse  $H_0$  est privilégiée
3. l'hypothèse  $H_0$  est privilégiée car on a décidé de se couvrir contre le risque de 1ère espèce avant le risque de 2-ième espèce : c'ad, on souhaite éviter avant tout de rejeter à tort et par conséquent, on a tendance à "trop accepter"
4. il est plus facile d'accepter que de rejeter car le rejet nécessite une "preuve" que l'acceptation n'est pas soutenable

## Méthodologie pour les tests asymptotiques (1/2)

- a) trouver une **statistique de test** (souvent un estimateur)  $\hat{\theta}_n$   
b) telle que sous  $H_0$  (càd ici pour  $\theta = \theta_0$ ), on a une normalité asymptotique

$$\sqrt{\frac{n}{v(\hat{\theta}_n)}} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{d} \mathcal{V}$$

(ou  $v(\theta_0)$  à la place de  $v(\hat{\theta}_n)$ )

- c) et tel que sous  $H_1$  (càd ici pour  $\theta > \theta_0$ ) :

$$\sqrt{\frac{n}{v(\hat{\theta}_n)}} (\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{p.s.} +\infty$$

(avec ou sans valeurs absolues selon la forme de  $H_1$ )

## Méthodologie pour les tests asymptotiques (2/2)

- d) on utilise cette statistique pour construire un test de niveau asymptotique  $\alpha \in (0, 1)$  en posant

$$\varphi(Z) = \begin{cases} H_0 & \text{quand } (\hat{\theta}_n - \theta_0) \leq \frac{q_{1-\alpha}^V \sqrt{v(\hat{\theta}_n)}}{\sqrt{n}} := t_{n,\alpha} \\ H_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La forme du test (ici  $\hat{\theta}_n - \theta_0$  plus petit que quelque chose) est donnée par le comportement de  $\hat{\theta}_n - \theta_0$  sous  $H_1$ .

- e) on a, sous  $H_0$ ,

$$\mathbb{P}_{\theta_0}[\text{rejet}] = \mathbb{P}_{\theta_0} \left[ \hat{\theta}_n - \theta_0 > t_{n,\alpha} \right] \longrightarrow \mathbb{P}[V > q_{1-\alpha}^V] = \alpha$$

C'est donc un test de niveau asymptotique  $\alpha$ .

- f) La puissance tend vers 1 car, sous  $H_1$ ,  $\mathbb{P}_{\theta}[\hat{\theta}_n - \theta_0 > t_{n,\alpha}] \rightarrow 1$ .

## Choix de tests : notion d'optimalité pour les tests

# Hypothèse simple contre alternative simple

- ▶ Cas où  $\Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$  avec  $\theta_0 \neq \theta_1$  et

$$\boxed{\Theta_0 = \{\theta_0\} \text{ contre } \Theta_1 = \{\theta_1\}}$$

- ▶ Existe-t-il un test  $\varphi^*$  **optimal**, au sens où :  $\forall \varphi$  test, on a **simultanément** un meilleur contrôle sur les deux erreurs (1ère et 2-ème espèce)

$$\begin{cases} \mathbb{P}_{\theta_0} [\varphi^* = H_1] \leq \mathbb{P}_{\theta_0} [\varphi = H_1] & \text{"proba de rejet à tort"} \\ \mathbb{P}_{\theta_1} [\varphi^* = H_0] \leq \mathbb{P}_{\theta_1} [\varphi = H_0] & \text{"proba d'accepter à tort"} \end{cases}$$

- ▶ Si  $\mathbb{P}_{\theta_0}$  et  $\mathbb{P}_{\theta_1}$  ne sont pas **étrangères** (cf. Cours 5) un tel test  $\varphi^*$  **ne peut pas exister**.

## Riposte : principe de Neyman (1/2)

- ▶ On « **dissymétrise** » les hypothèses  $H_0$  et  $H_1$  :  $H_0$  est « plus importante » que  $H_1$  dans le sens suivant : on **impose** une **erreur de première espèce prescrite** :

on souhaite éviter avant tout de rejeter à tort

### Définition

Pour  $\alpha \in (0, 1)$ , un test  $\varphi = \varphi_\alpha$  de l'hypothèse nulle  $H_0 : \theta \in \Theta_0$  contre une alternative  $H_1$  est de **niveau  $\alpha$**  si

$$\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta [\varphi_\alpha = H_1] \leq \alpha$$

- ▶ Un test de niveau  $\alpha$  ne dit **rien** sur la fonction erreur de seconde espèce (ou la puissance).

# Riposte : principe de Neyman (2/2)

## Définition

Soit  $\varphi$  un test de zone de rejet  $\mathcal{R}$ . La **puissance** du test  $\varphi$  est la fonction  $\pi_\varphi : \theta \in \Theta_1 \mapsto \mathbb{P}_\theta[Z \in \mathcal{R}]$  (proba de rejeter à raison)

- ▶ **Principe de Neyman** :  $\alpha \in (0, 1)$ , parmi les tests de niveau  $\alpha$ , chercher celui (ou ceux) qui sont **les plus puissants**

## Définition

Un test de niveau  $\alpha$  est dit **Uniformément Plus Puissant (UPP)** si sa puissance est maximale parmi celles de tous les tests de niveau  $\alpha$  :

1.  $\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta [\varphi^* = H_1] \leq \alpha$
2. et si  $\varphi$  est tel que  $\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta [\varphi = H_1] \leq \alpha$  alors

$$\forall \theta \in \Theta_1, \pi_{\varphi^*}(\theta) \geq \pi_\varphi(\theta)$$



## Test de Neyman-Pearson (test du rapport de vraisemblance)

Pour le cas d'une **hypothèse nulle simple** (càd  $\Theta_0 = \{\theta_0\}$ ) contre une **hypothèse alternative simple** (càd  $\Theta_1 = \{\theta_1\}$ ), un test UPP existe : c'est le test de Neyman-Pearson (ou test du rapport de vraisemblance) dont la construction est comme suit :

- ▶  $f(\theta, z) = \frac{d\mathbb{P}_\theta}{d\mu}(z)$ ,  $z \in \mathfrak{Z}$ ,  $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ ,  $\mu$  mesure dominante
- ▶ On choisit une **région critique** de la forme

$$\mathcal{R}(c) = \{z \in \mathfrak{Z} : f(\theta_1, z) > cf(\theta_0, z)\}, \quad c > 0$$

et on **calibre**  $c = t_{n,\alpha}$  de sorte que

$$\mathbb{P}_{\theta_0} [Z \in \mathcal{R}(t_{n,\alpha})] = \alpha$$

- ▶ Le test ainsi construit (si cette équation admet une solution) **est de niveau  $\alpha$** . On **montre** qu'il est UPP.

# Lemme de Neyman-Pearson

## Proposition

Soit  $\alpha \in [0, 1]$ . S'il existe  $t_{n,\alpha}$  solution de

$$\mathbb{P}_{\theta_0} [f(\theta_1, Z) > t_{n,\alpha} f(\theta_0, Z)] = \alpha$$

alors le test de région critique

$$\mathcal{R}_\alpha = \{z : f(\theta_1, z) > t_{n,\alpha} f(\theta_0, z)\}$$

est de niveau  $\alpha$  et **UPP** pour tester  $H_0 : \theta = \theta_0$  contre  $H_1 : \theta = \theta_1$ .

- ▶ Rem. : Si  $U = f(\theta_1, Z)/f(\theta_0, Z)$  est bien définie et  $\mathbb{P}_U \ll \lambda$  (sous  $\mathbb{P}_{\theta_0}$ ), alors  $\mathbb{P}_{\theta_0} [U > t_{n,\alpha}] = \alpha$  admet une solution.

## Exemple de test de Neyman-Pearson (1/4)

On observe  $Z = (X_1, \dots, X_n)$  où  $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(\theta, 1)$ . Pour  $\theta_0 < \theta_1$ , on considère le problème de test

$$H_0 : \theta = \theta_0 \text{ contre } H_1 : \theta = \theta_1$$

La vraisemblance en  $\theta$  est

$$f(\theta, Z) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2 + n\theta\bar{X}_n - \frac{n\theta^2}{2}\right)$$

Le rapport de vraisemblance est

$$\frac{f(\theta_1, Z)}{f(\theta_0, Z)} = \exp\left(n(\theta_1 - \theta_0)\bar{X}_n - \frac{n}{2}(\theta_1^2 - \theta_0^2)\right)$$

## Exemple de test de Neyman-Pearson (2/4)

- ▶ **Zone de rejet** du test de N-P. :

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(c) &= \{z \in \mathbb{R}^n : f(\theta_1, z) > cf(\theta_0, z)\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n : n(\theta_1 - \theta_0)\bar{x}_n - \frac{n}{2}(\theta_1^2 - \theta_0^2) > \log c\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n : \bar{x}_n > \frac{\theta_0 + \theta_1}{2} + \frac{\log c}{n(\theta_1 - \theta_0)}\}\end{aligned}$$

- ▶ **Choix de  $c$**  : on résout

$$\mathbb{P}_{\theta_0} \left[ \bar{X}_n > \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1) + \frac{\log c}{n(\theta_1 - \theta_0)} \right] = \alpha$$

Sous  $\mathbb{P}_{\theta_0}$  :

$$\bar{X}_n \sim \mathcal{N}\left(\theta_0, \frac{1}{n}\right)$$

## Exemple de test de Neyman-Pearson (3/4)

Résoudre en  $c$  : pour  $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ,

$$\mathbb{P} \left[ \theta_0 + \frac{1}{\sqrt{n}}g > \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta_1) + \frac{\log c}{n(\theta_1 - \theta_0)} \right] = \alpha$$

càd  $\mathbb{P} \left[ g > \frac{\sqrt{n}}{2}(\theta_1 - \theta_0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\log c}{\theta_1 - \theta_0} \right] = \alpha$ , soit

$$\frac{\sqrt{n}}{2}(\theta_1 - \theta_0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\log c}{\theta_1 - \theta_0} = q_{1-\alpha},$$

où  $q_{1-\alpha}$  est le quantile d'ordre  $1 - \alpha$  d'une  $\mathcal{N}(0, 1)$

- **Conclusion** : le test de NP de niveau  $\alpha$  a pour zone de rejet  $\mathcal{R}(c_\alpha)$  où

$$c_\alpha = \exp \left( \sqrt{n}(\theta_1 - \theta_0)q_{1-\alpha} - \frac{n(\theta_1 - \theta_0)^2}{2} \right)$$

qui peut s'écrire plus simplement par

$$\mathcal{R}(c_\alpha) = \{(x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n : \bar{x}_n > \theta_0 + t_{n,\alpha}\} \text{ où } t_{n,\alpha} = \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}.$$

## Exemple de test de Neyman-Pearson (4/4)

On voit que le test de NP s'écrit sous la forme :

$$\varphi(Z) = \begin{cases} H_0 & \text{quand } \bar{X}_n \leq \theta_0 + t_{n,\alpha} \\ H_1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où } t_{n,\alpha} = \frac{q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

rem. : la valeur  $\theta_1$  n'intervient pas dans le test de NP.

- ▶ la **puissance** du test est ici :

$$\pi_\varphi(\theta_1) = \mathbb{P}_{\theta_1}[\bar{X}_n > \theta_0 + t_{n,\alpha}] = \mathbb{P}[g > \sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1) + q_{1-\alpha}]$$

car sous  $\mathbb{P}_{\theta_1}$ ,  $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\theta_1, 1/n)$ .

rem. : La puissance augmente quand  $n$  augmente et quand  $|\theta_0 - \theta_1|$  augmente. L'alternative n'intervient que dans la puissance.

# Tests classiques dans le modèle d'échantillonnage gaussien

# Test sur la moyenne à variance connue

On observe  $Z = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2 \text{Id}_n)$  où  $\sigma$  est connue. On considère le problème de test

$$H_0 : \mu \leq \mu_0 \quad \text{contre} \quad H_1 : \mu > \mu_0$$

**Principe** on estime  $\mu$  et on rejette  $H_0$  si l'estimateur est « plus grand » que  $\mu_0$ . On considère des tests de la forme

$$\varphi_\alpha(Z) = \begin{cases} H_0 & \text{si } \bar{X}_n < \mu_0 + t_{n,\alpha} \\ H_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On choisit le **seuil**  $t_{n,\alpha}$  tel que

$$\sup_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu [\varphi_\alpha(Z) = H_1] = \alpha$$

Rem. : On verra pourquoi  $\bar{X}_n$  est la statistique de test naturelle pour ce problème lors de l'étude des problèmes de test à rapport de vraisemblance monotone.



## Détermination de $t_{n,\alpha}$

**Majoration de l'erreur de première espèce.** Soit  $\mu \leq \mu_0$ . Sous  $\mathbb{P}_\mu$ ,  $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$ , alors pour  $g \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_\mu [\bar{X}_n - \mu_0 \geq t_{n,\alpha}] &= \mathbb{P} \left[ \left( \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} g \right) - \mu_0 \geq t_{n,\alpha} \right] \\ &= \mathbb{P} \left[ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} g \geq t_{n,\alpha} + (\mu_0 - \mu) \right] \\ &\leq \mathbb{P} \left[ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} g \geq t_{n,\alpha} \right] \stackrel{\text{on veut}}{=} \alpha\end{aligned}$$

On prend

$$t_{n,\alpha} = \frac{\sigma q_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

En particulier, on a :

$$\sup_{\mu \leq \mu_0} \mathbb{P}_\mu [\varphi_\alpha(Z) = H_1] = \mathbb{P}_{\mu_0} [\varphi_\alpha(Z) = H_1]$$

# Calcul de la puissance du test

Soit  $\mu > \mu_0$ . Sous  $\mathbb{P}_\mu$ , la loi de  $\bar{X}_n$  est  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$  alors la **fonction de puissance** du test est

$$\begin{aligned}\mu \in (\mu_0, +\infty) &\mapsto \mathbb{P}_\mu [\bar{X}_n - \mu_0 \geq t_{\alpha, n}] \\ &= \mathbb{P} \left[ \mathbf{g} \geq \frac{\sqrt{n}(\mu_0 - \mu)}{\sigma} + \mathbf{q}_{1-\alpha} \right]\end{aligned}$$

Rem. :

- ▶ la puissance tend vers 1 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,
- ▶ c'est un test UPP ; il faut **d'autres outils** pour le montrer.

# Test sur la moyenne à variance inconnue

- ▶ **Ingrédient principal** :

$$s_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{n}{n-1} (\hat{\sigma}_n^2)^{mv}$$

alors

$$(n-1) \frac{s_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

et

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{s_n} \sim \text{Student}(n-1)$$

et ces variables sont **pivotales** : leur loi ne dépend pas de  $\mu, \sigma^2$  sous  $\mathbb{P}_{\mu, \sigma^2}$ .

- ▶ Les lois du  $\chi^2$  et de **Student** (à  $k$  degrés de liberté) sont classiques et s'étudient indépendamment.

# Tests sur la moyenne

- ▶ On teste  $H_0 : \mu \leq \mu_0$  contre  $H_1 : \mu > \mu_0$ . Un test de niveau  $\alpha$  : donné par la zone de rejet

$$\mathcal{R}_\alpha = \{z \in \mathbb{R}^n : T(z) > q_{1-\alpha, n-1}^{\mathcal{F}}\}$$

où

$$T(Z) = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu_0)}{S_n}$$

et  $q_{1-\alpha, n-1}^{\mathcal{F}}$  = quantile d'ordre  $1 - \alpha$  de la loi de Student à  $n - 1$  degrés de liberté :

$$\mathbb{P} [\text{Student}_{n-1} > q_{1-\alpha, n-1}^{\mathcal{F}}] = \alpha$$

- ▶ Rem. : Pour le test  $H_0 : \mu = \mu_0$  contre  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ , un test de niveau  $\alpha$  est donné par  $\mathcal{R}_\alpha = \{z \in \mathbb{R}^n : |T(z)| > q_{1-\alpha/2, n-1}^{\mathcal{F}}\}$ .

## Test sur la variance

- ▶ On teste  $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$  contre  $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$ . Un test de niveau  $\alpha$  : donné par la zone de rejet

$$\mathcal{R}_\alpha = \{z \in \mathbb{R}^n : V(z) > q_{1-\alpha, n-1}^{\chi^2}\},$$

où

$$V(Z) = \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

et

$$\mathbb{P} [\text{Chi-deux}_{n-1} > q_{1-\alpha, n-1}^{\chi^2}] = \alpha.$$

- ▶ **Mêmes remarques méthodologiques** sur l'optimalité de ces tests que précédemment.