Examen du cours d'optimisation différentiable

Durée : 2 heures
Les documents ainsi que les calculatrices ne sont pas autorisés.

****

Exercice 0.1 (optima locaux et globaux)
Etudier les extremas locaux et globaux sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

(On ne cherchera pas à déterminer la nature des points non couverts par la condition du second ordre).

****

Correction de l'exercice 0.1 On remarque f est coercive sur $\mathbb{R}^2$ vu que si $|x| \to +\infty$ ou $|y| \to +\infty$ alors $f(x,y) \to +\infty$. Par ailleurs, f est continue en tant que polynôme donc f admet un minimum global et pas de maximum global.

On cherche maintenant les extrema locaux de f. On sait d'après la condition du premier ordre que si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un extremum local de f alors nécessairement $\nabla f(x,y) = 0$. On est donc amené à chercher les points critique de f càd les points (x,y) tels que $\nabla f(x,y) = 0$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\nabla f(x,y) = 0$, on a alors

$$\left\{ \begin{array}{ll} 4x^3 - 4(x-y) & = 0 \\ 4y^3 + 4(x-y) & = 0 \end{array} \right. \text{ qui est équivalent à } \left\{ \begin{array}{ll} x^3 + y^3 & = 0 \\ 4x^3 - 4(x-y) & = 0 \end{array} \right. \text{ et donc } \left\{ \begin{array}{ll} x & = -y \\ 4x^3 - 8x & = 0. \end{array} \right.$$

Il y a alors 3 points critiques :

$$(0,0), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ et } (\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Pour déterminer si parmi ces points critiques, il y a des extrema, on regarde la Hessienne de f en ces points. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

alors

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = \nabla^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}.$$

En calculant le déterminant et la trace des Hessiennes, on voit que la Hessienne de f en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ admet deux valeurs propres strictement positive donc $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sont des minima locaux de f. Par ailleurs, $\nabla^2 f(0,0)$ admet pour valeur propre 0 et -8, on est donc dans un cas indéterminé de la condition du second ordre puisque $\nabla^2 f(0,0)$ est une matrice semi-définie négative sans être négative. Par ailleurs, on a $f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = -8$ et $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8$ et $f(0,0) = 0$. Donc, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ sont deux minima globaux.

Pour déterminer la nature de $(0,0)$, on peut voir que $f(x,x) = 2x^4 > 0$ et $f(x,-x) = 2x^4 - 8x^2 < 0$ quand $|x| < \sqrt{2}$. Donc, $(0,0)$ n'est ni un minimum ni un maximum local.

****

Exercice 0.2 (Inégalité arithmético-géométrique)
Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ et $s > 0$. On considère l'application

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}_+^*)^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \to & x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n \end{array} \right.$$

qui à un n-uplet renvoie le produit de ses composantes et on pose

$$K = \left\{ (x_1,\dots,x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n : \sum_{i=1}^n x_i = s \right\}.$$

1. **Trouver les solutions du problème**
$$\max_{x\in K} g(x).$$
2. **En déduire l'inégalité arithmético-géométrique : pour tout $x = (x_i)_1^n \in (\mathbb{R}_+^*)^n$**
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \geq (x_1 \times \cdots \times x_n)^{1/n}. \tag{1}$$
Montrer aussi que le cas d'égalité est atteint dans (1) uniquement quand tous les termes x_i sont égaux.
3. **Déduire de l'inégalité arithmético-géométrique que parmi tous les triangles ayant le même périmètre, celui qui maximise la surface est le triangle équilatéral. Pour cela, on rappel que l'aire d'un triangle dont les longueurs des côtés sont données par a, b et c est**
$$A(a,b,c) = \sqrt{\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}-a\right)\left(\frac{L}{2}-b\right)\left(\frac{L}{2}-c\right)}$$
pour le périmètre $L = a+b+c$.
4. **Montrer le dernier résultat par une preuve directe faisant apparaître un problème d'optimisation sous contrainte.**

****

Correction de l'exercice 0.2 **1.** On retrouve le cadre du cours en posant $f(x) = -g(x)$ puisqu'ainsi, chercher les minima de f revient à chercher les maxima de g. On pose aussi

$$g_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \to & x_1 + x_2 + \cdots + x_n - s. \end{array} \right.$$

On a ainsi $K = \{x \in (\mathbb{R}_+^*)^n : g_1(x) = 0\}$ et on veut résoudre

$$\min_{x \in K} f(x). \tag{2}$$

Comme f est un polynôme et que K est compact (en tant que fermé borné), (2) admet au moins une solution. Pour trouver les solutions de (2), on peut appliquer le théorème de KKT. Comme il n'y a qu'une seule contrainte d'égalité affine, on voit que K est qualifiée (en tout point de K). Si $x = (x_i)_{i=1}^n \in K$ est solution de (2) alors il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) = 0$ càd

$$\begin{pmatrix} -x_2 \times \cdots \times x_n \\ -x_1 \times x_3 \times x_4 \times \cdots \times x_n \\ \vdots \\ -x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_{n-1} \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

On en déduit que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}, x_i = x_j$ et comme $x \in K$, on a $\sum x_i = s$ alors $x_i = s/n$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. On a donc que $(s/n, \ldots, s/n)$ est l'unique solution du problème (2).

2.On a donc pour tout $x = (x_i)_1^n \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum x_i = s$ que $(s/n)^n = g(s/n, \ldots, s/n) \geq g(x_1, \ldots, x_n)$ càd

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq (x_1 \times \cdots \times x_n)^{1/n}.$$

Par ailleurs, le cas d'égalité est atteint par les éléments maximisant g. Mais d'après la question précédente seul l'élément dont les composantes sont toutes égales atteint ce maximum. On a donc bien que le cas d'égalité est atteint uniquement par le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales.

3. L'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\left(\frac{L}{2} - a\right)\left(\frac{L}{2} - b\right)\left(\frac{L}{2} - c\right) \leq \left(\frac{1}{3}\left(\frac{L}{2} - a + \frac{L}{2} - b + \frac{L}{2} - c\right)\right)^3 = \left(\frac{L}{6}\right)^3$$

et le cas d'égalité est atteint uniquement quand $a = b = c = L/3$. C'est donc bien le triangle équilatéral que maximise l'aire à périmètre donné.

4. Pour montrer le résultat, il suffit de montrer que, étant donné $L > 0$, le problème

$$\max_{a,b,c>0} (A(a,b,c) : a + b + c = L) \tag{3}$$

admet pour unique solution $a = b = c = L/3$. On pose $f(a,b,c) = -A(a,b,c)^2$, $g_1(a,b,c) = a + b + c - L$ et $K = \{(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3 : g_1(a,b,c) = 0\}$. Le problème (3) est équivalent à

$$\min_{(a,b,c) \in K} f(a,b,c). \tag{4}$$

En tant que polynôme, f est continue et comme K est compact (en tant que fermé borné), (4) admet au moins une solution. Par ailleurs, il n'y a qu'une seule contrainte d'égalité qui est une fonction affine donc la contrainte est qualifiée. Si $x = (a,b,c) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ est solution de (4) alors d'après KKT, il existe λ_1 tel que $\nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) = 0$ càd

$$\begin{pmatrix} \frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} - b\right)\left(\frac{L}{2} - c\right) \\ \frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} - a\right)\left(\frac{L}{2} - c\right) \\ \frac{L}{2}\left(\frac{L}{2} - a\right)\left(\frac{L}{2} - b\right) \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

On en déduit que $a = b = c$ et donc, c'est bien le triangle équilatéral que maximise l'aire à périmètre donné.

****

Exercice 0.3
Soient $w_1, w_2, y > 0$. Trouver une solution au problème d'optimisation suivant :

$$\min\left(w_1x_1 + w_2x_2 : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1^2 + x_2^2 \geq y\right) \tag{5}$$

****

Correction de l'exercice 0.3 On pose pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x) = w_1x_1 + w_2x_2, h_1(x) = -x_1, h_2(x) = -x_2, h_3(x) = y - x_1^2 - x_2^2$$

et $K = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R} : h_1(x) \leq 0, h_2(x) \leq 0, h_3(x) \leq 0\}$. Trouver des solutions aux problème (5) est équivalent à trouver des solutions au problème $\min_{x\in K} f(x)$.

Les fonctions f, h_1, h_2, h_3 sont de classe $\mathcal{C}^1$ mais h_3 n'est pas convexe. On doit donc résoudre un problème d'optimisation différentiable (non convexe). En particulier les conditions KKT sont nécessaires (mais pas suffisantes en général).

Existence : Comme f est continue et que $f(x_1, x_2) \to +\infty$ quand x_1 ou x_2 tend vers l'infini, on voit que (5) admet au moins une solution.

Qualification : La contrainte K est faite de 3 contraintes d'inégalité dont 2 affines. Pour vérifier que K est qualifiée, il suffit d'appliquer la condition de Mangasarian-Fromovitch : il suffit ici de montrer que si $x = (x_1, x_2) \in K$ est tel que $h_3(x) = 0$ alors il existe $v \in \mathbb{R}^2$ tel que $\left\langle \nabla h_3(x), v\right\rangle < 0$. On peut par exemple prendre $v = (-x_1, -x_2)$; alors $\left\langle \nabla h_3(x), v\right\rangle = -2y < 0$. Donc la contrainte est bien qualifiée. (Rem. : on ne peut pas appliquer ici la condition de Slater car h_3 n'est pas convexe).

KKT : D'après le théorème de KKT, si $x^* = (x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2$ est solution de (5) alors il existe μ_1, μ_2, μ_3 tels que

$$\begin{aligned}
&\nabla f(x^*) + \mu_1\nabla h_1(x^*) + \mu_2\nabla h_2(x^*) + \mu_3\nabla h_3(x^*) = 0\\
&\mu_j \geq 0, \forall j = 1, 2, 3\\
&\mu_j h_j(x^*) = 0, \forall j = 1, 2, 3.
\end{aligned} \tag{6}$$

C'est-à-dire,

$$\begin{aligned}
&w_1 - \mu_1 - 2\mu_3x_1^* = 0\\
&w_2 - \mu_2 - 2\mu_3x_2^* = 0\\
&\mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0\\
&\mu_1x_1^* = 0, \mu_2x_2^* = 0, \mu_3(y - (x_1^*)^2 - (x_2^*)^2) = 0.
\end{aligned}$$

Si $\mu_3 = 0$ alors $\mu_1 = w_1 > 0$ et $\mu_2 = w_2 > 0$ donc $x_1^* = x_2^* = 0$ c'est-à-dire $x^* = 0$ mais $h_3(0) = y > 0$ donc 0 n'est pas dans K et donc ne peut pas être solution du problème. Donc $\mu_3 > 0$.

Si $\mu_3 > 0$ alors $(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 = y$. Si $\mu_1 > 0$ alors $x_1 = 0$ et donc $x_2 = \sqrt{y}$. De même si $\mu_2 > 0$ alors $x_2 = 0$ et $x_1 = \sqrt{y}$. Si $\mu_1 = \mu_2 = 0$ alors $w_1/(2x_1) = \mu_3 = w_2/(2x_2)$ et donc $x_1 = w_1x_2/w_2$ et comme $x_1^2 + x_2^2 = y$ on en déduit que

$$x_1 = \frac{w_1\sqrt{y}}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \text{ et } x_2 = \frac{w_2\sqrt{y}}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}.$$

On a donc 3 solutions possibles au problème :

$$a = (0, \sqrt{y}), b = (\sqrt{y}, 0) \text{ et } c = \left(\frac{w_1 \sqrt{y}}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}}, \frac{w_2 \sqrt{y}}{\sqrt{w_1^2 + w_2^2}} \right).$$

Il reste alors à évaluer la fonction objectif sur ces 3 solutions :

$$f(a) = w_2 \sqrt{y}, f(b) = w_1 \sqrt{y} \text{ et } f(c) = \sqrt{y} \sqrt{w_1^2 + w_2^2}.$$

Comme $\sqrt{w_1^2 + w_2^2} \geq w_1, w_2$, on voit que c ne peut pas être solution au problème. On a alors :

1. si $w_1 > w_2$ alors a est l'unique solution du problème
2. si $w_2 < w_1$ alors b est l'unique solution du problème
3. si $w_1 = w_2$ alors le problème a deux solutions qui sont a et b.