Examen du cours d'optimisation différentiable

Durée : 2 heures
Les documents ainsi que les calculatrices ne sont pas autorisés.

****

Exercice 0.1

On considère une norme $\|\cdot\|$ sur un espace vectoriel E. Soient $x, y \in E$. Montrer que

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & \|tx + y\| \end{cases}$$

est continue.

****

Correction de l'exercice 0.1 `1pt` Comme $\|\cdot\|$ est une norme, elle vérifie l'inégalité triangulaire. On a alors pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$,

$$|f(t) - f(t')| = |\, \|tx + y\| - \left\|t'x + y\right\| \,| \leq \left\|(tx + y) - (t'x + y)\right\| = |t - t'| \, \|x\| \, .$$

Donc f est Lipschitzienne et, en particulier, elle est continue.

****

Exercice 0.2

Pour chacune des deux fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels la fonction admet un minimum local, un maximum local, un minimum global, un maximum global.

1) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + 2x + 3y$

2) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

****

Correction de l'exercice 0.2 **1)** `2pts` La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que polynôme de $\mathbb{R}^2$. Les points critiques de f sont donnés par l'équation $\nabla f(x, y) = 0$ càd $2x + y + 2 = 0$ et $x + 2y + 3 = 0$ qui admet pour unique solution $(x, y) = (-1/3, -4/3)$. Pour déterminer la nature de ce point critique, on étudie la Hessienne de f en ce point. On

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

qui admet pour déterminant 3 et trace 4. C'est donc une matrice définie positive et donc $(x,y) = (-1/3, -4/3)$ est un minimum local. Comme $(x,y) \to \nabla^2 f(x,y)$ est constante égale à une matrice définie positive, f est une fonction convexe (et même fortement convexe). Donc tout minimum local de f est un minimum global. On conclut que f admet un unique minimum local qui est aussi un unique minimum global donné par $(-1/3, -4/3)$ et pas de maximum local ni global.

2) `3pts` La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que polynôme de $\mathbb{R}^2$. Les points critiques de f sont donnés par l'équation $\nabla f(x,y) = 0$ càd $x^3 - y = 0$ et $y^3 - x = 0$ qui admet trois solutions $\{(-1,-1), (0,0), (1,1)\}$. Pour déterminer la nature de ces points critiques, on étudie la Hessienne de f en ces points. On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

qui admet pour déterminant $144x^2y^2 - 16$ et trace $12(x^2 + y^2)$.

En $(0,0)$, la hessienne $\nabla^2 f(0,0)$ a un déterminant égal à -16 et une trace nulle, elle admet donc 4 et -4 comme valeurs propres. Donc $(0,0)$ n'est ni un minimum local ni un maximum local (c'est un point-selle).

En $(1,1)$ et $(-1,-1)$, la Hessienne de f a pour déterminant 128 et trace 24, elle est donc définie positive et $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont des minima locaux. Regardons s'ils sont minima globaux. Comme $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$ ils sont soit tous les deux minima globaux soit aucun ne l'est. Par ailleurs, on voit que si $|x| \to +\infty$ ou $|y| \to +\infty$ alors $f(x,y) \to +\infty$, donc f est coercive alors elle admet au moins un minimum global. On en déduit que $(-1,-1)$ et $(1,1)$ sont les deux minima globaux de f.

****

Exercice 0.3

On considère le problème d'optimisation $(P) \quad \min\left(f(x) : x \in K\right)$ **sur** $\mathbb{R}^3$ **où**

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longrightarrow & (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \end{array} \right. \quad \textbf{et } K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\right\}.$$

1) **Montrer que l'ensemble K est compact. En déduire que le problème (P) admet une solution. A quelle figure géométrique correspond la contrainte K ?**
2) **Déterminer l'ensemble des points de la contrainte K où K y est qualifiée.**
3) **Déterminer les points de K vérifiant les conditions KKT**
4) **Résoudre (P)**

****

Correction de l'exercice 0.3 **1)** `1.5pts` La contrainte K est l'intersection des images réciproques de deux fermés par des fonctions continues, c'est donc un fermé. Par ailleurs, K est dans la boule euclidienne centrée en 0 et de rayon 1, donc K est borné. On en déduit que K est compact. Comme la fonction objectif f est continue, elle atteint son infimum sur tout compact en particulier sur K. Donc (P) admet une solution. La contrainte K est l'intersection de la sphère Euclidienne $S_2^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ et de l'hyperplan $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$. C'est donc la sphère Euclidienne unité centrée en 0 de H.

2) `2pts` La contrainte K est définie par deux contraintes d'égalité. Etant donné $(x, y, z) \in K$, pour montrer que K est qualifié en (x, y, z), il suffit de vérifier que la condition de Mangasarian-Fromovitch est satisfaite (elle coïncide avec la condition de qualification dans le théorème des extrema liés ici vu qu'il n'y a que des contraintes d'égalité). On note $g_1 : (x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $g_2 : (x, y, z) \to x + y + z$ les deux fonctions définissant les deux contraintes d'égalité de K. Pour montre que K est qualifiée en (x, y, z), il suffit de montrer que la famille de gradient $(\nabla g_1(x, y, z), \nabla g_2(x, y, z))$ est libre. On a

$$\nabla g_1(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)^\top \text{ et } \nabla g_2(x, y, z) = (1, 1, 1)^\top.$$

La famille $(\nabla g_1(x, y, z), \nabla g_2(x, y, z))$ est liée si et seulement si $x = y = z$. Or comme $(x, y, z) \in K$, on a $x + y + z = 0$ et donc si "$x = y = z$" alors $x = y = z = 0$ mais c'est impossible car on doit aussi avoir $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Donc $(\nabla g_1(x, y, z), \nabla g_2(x, y, z))$ est libre et ceci est vrai pour tout $(x, y, z) \in K$ donc K est qualifiée en chacun de ces points.

3) `3pts` Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Le point $a = (x, y, z)$ est dans K et vérifie les conditions KKT quand il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que (x, y, z) vérifie le système d'équation

$$\begin{cases} a \in K \\ \nabla f(a) + \lambda_1 \nabla g_1(a) + \lambda_2 \nabla g_2(a) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

qui est équivalent à

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0 \\ \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2(y-1) \\ 2z \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases}$$

On voit que $\lambda_1 \neq -1$ (sinon λ_2 vaut 0 et 1) alors $x = y = (2 - \lambda_2)/[2(\lambda_1 + 1)]$ et $z = -\lambda_2/[2(\lambda_1 + 1)]$. Grâce aux équations $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0$, on voit que $\lambda_1 = \pm\sqrt{2/3} - 1$ et $\lambda_2 = 4/3$. Il existe alors deux points de K vérifiant les conditions KKT : a et $-a$ où $a = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3})$.

4) `1.5pts` Par le théorème de KKT en optimisation différentiable, on sait que si $a \in K$ est solution de (P) alors nécessairement il doit vérifier les conditions KKT. On a aussi vu que (P) admet forcément une solution donc l'ensemble des solutions de (P) est soit $\{a\}$, soit $\{-a\}$ soit $\{a, -a\}$. On a $f(a) = 3 - 2\sqrt{2/3} < f(-a) = 3 + 2\sqrt{2/3}$. Donc $a = (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -\sqrt{2/3})$ est l'unique solution du problème (P).

****

Exercice 0.4

On considère le problème suivant

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} (\exp(y) : x \leq y, y \geq 0) \tag{2}$$

1. **Trouver les solutions de (2) et déterminer sa valeur optimale,**
2. **Déterminer le problème dual de (2) ; déterminer ses solutions et sa valeur optimale. (On utilisera la convention $t \log t = 0$ quand $t = 0$)**
3. **Y-a-t'il dualité forte ?**

****

Correction de l'exercice 0.4 **1)** `1.5pts` Par croissance de la fonction $y \to \exp(y)$, on voit que la solution optimale est atteinte quand $y = 0$. Donc l'ensemble des solutions de (2) est $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ et la valeur optimale est $\exp(0) = 1$.

2) `3pts` La fonction de Lagrange est $\mathcal{L} : ((x, y), (\mu_1, \mu_2)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2_+ \to \exp(y) + \mu_1(x - y) + \mu_2(-y)$. La fonction duale est $\psi : (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2_+ \to \inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \mathcal{L}((x, y), (\mu_1, \mu_2))$. Soit $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2_+$, on pose $g(x, y) = \exp(y) + \mu_1(x - y) - \mu_2 y$. On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \exp(y) - \mu_1 - \mu_2 \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 g(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \exp(y) \end{pmatrix}.$$

Donc g est convexe et g admet un point critique uniquement quand $\mu_1 = 0$ et $y = \log(\mu_2)$ (et atteint dans ce cas la valeur $(1 - \log(\mu_2))\mu_2$) sinon, quand $\mu_1 \neq 0$, $\inf g = -\infty$. On a donc

$$\psi(\mu_1, \mu_2) = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\mu_1, \mu_2) & \longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} -\infty \text{ si } \mu_1 \neq 0 \\ (1 - \log(\mu_2))\mu_2 \text{ sinon.} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

avec la convention $t \log t = 0$ quand $t = 0$. Le problème dual est donc

$$\max_{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2} ((1 - \log \mu_2)\mu_2 : \mu_1 = 0, \mu_2 \geq 0) \tag{3}$$

et admet pour unique solution $(\mu_1, \mu_2) = (0, 1)$. La valeur optimale du problème duale vaut alors 1.

3) `1.5pts` Comme les valeurs optimales du problème dual et primal sont toutes les deux égales à 1, on en déduit qu'on a dualité forte :

$$\max_{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2_+} \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \mathcal{L}((x, y), (\mu_1, \mu_2)) = \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \max_{(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2_+} \mathcal{L}((x, y), (\mu_1, \mu_2)).$$