Mi-parcours du cours d'optimisation différentiable

Durée : 1 heure
Les documents ainsi que les calculatrices ne sont pas autorisés.

****

Exercice 0.1
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2.$$

1. **Montrer que le problème**

$$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) \tag{1}$$

possède une solution. On pourra par exemple montrer que la fonction f est coercive en montrant qu'il existe $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) \geq \alpha \|(x,y)\|_2^2 + \beta$$

où $\|\cdot\|_2$ désigne la norme Euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

2. **La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$? (on pourra en particulier étudier la Hessienne de f en $(1,0)$)**
3. **Déterminer les points critiques de f et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...). Résoudre le problème (1).**

****

Correction de l'exercice 0.1

1) `[2 points]` Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a $2xy \geq -(x^2+y^2)$ alors

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy \geq x^4 - 4x^2 + y^4 - 4y^2.$$

De plus $x^4 - 8x^2 = (x^2-4)^2 - 16 \geq -16$ donc $x^4 - 4x^2 \geq 4x^2 - 16$. Alors,

$$f(x,y) \geq 4(x^2+y^2) - 32.$$

On en déduit que $f(x,y) \to +\infty$ quand $\|(x,y)\|_2 \to +\infty$, càd f est coercive. Comme f est aussi continue (en tant que polynôme), on a bien que (1) admet une solution.

2) `[4 points]` On rappelle qu'une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la Hessienne de f en (x, y) est semi-définie. Ici, la Hessienne de f en (x, y) est

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 4 \\ 4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

En particulier, en $(x, y) = (1, 0)$, on a

$$\nabla^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

qui a pour déterminant -48 donc $\nabla^2 f(1, 0)$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés et n'est donc pas semi-définie positive. On en déduit que f n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.

3) `[6 points]` Les points critiques de f sont les points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquels $\nabla f(x, y) = 0$ càd

$$\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 - y + x = 0. \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0. \end{cases}$$

Donc les points critiques de f sont $(0, 0)$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Pour savoir quelle est la nature de ces points, on peut regarder la Hessienne de f en ces points. On a

$$\nabla^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

qui a pour trace -8 et déterminant 0 donc 0 et -8 sont les valeurs singulières de $\nabla^2 f(0, 0)$. On ne peut donc pas conclure sur la nature du point critique $(0, 0)$ de f. On a aussi

$$\nabla^2 f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = \nabla^2 f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

qui a pour trace 40 et déterminant 384. Donc $\nabla^2 f(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $\nabla^2 f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ ont deux valeurs singulières strictement positives. Donc $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sont deux minima locaux.

On sait que (1) a au moins une solution et que cette solution est un point critique de f car f est différentiable. Il suffit donc de calculer la valeur de f en les points critiques pour trouver une solution de (1). On a

$$f(0,0) = 0, \quad f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = -8 \text{ et } f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = -8.$$

Donc (1) admet deux solutions en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et atteint une valeur minimale de -8 en ces deux points.

****

Exercice 0.2

On considère la courbe K d'équation $x^6 + y^6 = 1$ dans $\mathbb{R}^2$ (càd $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^6 + y^6 = 1\}$).

1. **Déterminer les points de K les plus proches (en norme Euclidienne) de l'origine**
2. **Déterminer les points de K les plus éloignés (en norme Euclidienne) de l'origine.**

Indication : On pourra introduire la fonction $f(x,y) = \|(x,y)\|_2^2 = x^2 + y^2$.

****

Correction de l'exercice 0.2

On pose $g(x,y) = x^6 + y^6 - 1$, $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$ et $f(x,y) = x^2 + y^2$. On s'intéresse aux deux problèmes suivants :

1. pour la question *1.* :
$$\min_{(x,y)\in K} f(x,y), \tag{2}$$
2. pour la question *2.* :
$$\max_{(x,y)\in K} f(x,y). \tag{3}$$

Dans les deux cas, on optimise une fonction continue sur un compact donc les deux problèmes ont au moins une solution. De plus, la contrainte K n'est faite que d'une contrainte d'égalité "$g(x,y) = 0$" pour laquelle on a $\nabla g(x,y) = 0$ si et seulement si $(x,y) = (0,0)$. Or $(0,0) \notin K$ donc la famille $\{\nabla g(x,y)\}$ est libre pour tout $(x,y) \in K$ et donc la contrainte K est qualifiée.

1) `[6 points]` La fonction de Lagrange est définie pour tout $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$ par
$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^6 + y^6 - 1).$$

Par le théorème de KKT, si (x^*, y^*) est solution de (2) alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

i) $(x^*, y^*) \in K$

ii) $\nabla_{(x,y)} L(x^*, y^*, \lambda) = 0$

qui est équivalent à
$$\left\{\begin{array}{c} (x^*)^6 + (y^*)^6 = 1 \\ 2x^*(1 + 3\lambda(x^*)^4) = 0 \\ 2y^*(1 + 3\lambda(y^*)^4) = 0. \end{array}\right.$$

On obtient donc les solution suivantes :
$$\left\{\begin{array}{c} x^* = \pm 1/(-3\lambda)^{1/4} = \pm 2^{-1/6}, \quad y^* = \pm 1/(-3\lambda)^{1/4} = \pm 2^{-1/6} \text{ (et } \lambda = -2^{2/3}/3) \\ x^* = 0, \quad y^* = \pm 1 \text{ (et } \lambda = -1/3) \\ x^* = \pm 1, \quad y^* = 0 \text{ (et } \lambda = -1/3). \end{array}\right.$$

On vérifie que $f(0,\pm 1) = f(\pm 1, 0) = 1$ et $f(\pm 2^{-1/6}, \pm 2^{-1/6}) = 2 \times 2^{-1/3} \equiv 1.59$. On en déduit que les points de K les plus proches de 0 pour la distance Euclidienne sont $(\pm 1, 0)$ et $(0, \pm 1)$ et que leur distance à 0 vaut 1.

2) `[4 points]` De la même manière que dans la question précédente, on prouve que les points de K les plus éloignés de 0 pour la distance Euclidienne sont $(\pm 2^{-1/6}, \pm 2^{-1/6})$ et que leur distance à 0 vaut $2 \times 2^{-1/3} \equiv 1.59$.