Mi-parcours du cours d'optimisation différentiable

Durée : 1 heure

Les documents ainsi que les calculatrices ne sont pas autorisés.

****

Exercice 0.1

Montrer que les deux fonctions suivantes admettent des dérivées partielles en $(0,0)$ **dans toutes les directions de** $\mathbb{R}^2$ **sans pour autant être continues en** $(0,0)$ **pour**

1.

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \log|x| & \textbf{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & \textbf{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \textbf{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

****

Correction de l'exercice 0.1

1. `[2pts]` Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on a quand $h \to 0$ et $h \neq 0$

$$\frac{f((0,0)+h(u,v)) - f((0,0))}{h} = v^2 h \log|hu| \to 0.$$

   Donc f est dérivable en $(0,0)$ selon (u,v) et $f'_{(u,v)}((0,0)) = 0$. Par ailleurs, f n'est pas continue en $(0,0)$ vue que $f(1/n, 1/\sqrt{\log n}) = -1 \neq f((0,0)) = 0$ pour tout $n \to 0$ alors que $((1/n, 1/\sqrt{\log n}))_n$ tend vers $(0,0)$ quand $n \to \infty$.

2. `[2pts]` Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, on a quand $h \to 0$ et $h \neq 0$

$$\frac{f((0,0)+h(u,v)) - f((0,0))}{h} = \frac{hu^2 v}{h^2 u^4 + v^2} \to 0.$$

   donc f est dérivable en $(0,0)$ dans toutes les directions. Par ailleurs, $f(1/n, 1/n^2) = 1/2 \neq f(0,0)$ pour tout $n \geq 0$, alors f n'est pas continue en $(0,0)$.

****

Exercice 0.2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ **une fonction de classe** $\mathcal{C}^1$**. Calculer le gradient de** g **dans les cas suivants :**

1. $g(x,y) = f(y,x)$

2. $g(x) = f(x, x)$

3. $g(x, y) = f(y, f(x, x))$

4. $g(x) = f(x, f(x, x))$

****

Correction de l'exercice 0.2

1. `[1pt]` On a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} \partial_2 f(y, x) \\ \partial_1 f(y, x) \end{pmatrix}$$

2. `[1pt]` On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\nabla g(x) = \partial_{(1,1)} f(x, x) = \big\langle \nabla f(x, x), (1, 1) \big\rangle = \partial_1 f(x, x) + \partial_2 f(x, x).$$

3. `[2pts]` On applique ici la "chain rule" en utilisant le calcul des gradients précédent. On a $g(x, y) = f \circ \varphi(x, y)$ où $\varphi(x, y) = (y, f(x, x))$ qui a pour matrice Jacobienne

$$J(\varphi)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \big\langle \nabla f(x, x), (1, 1) \big\rangle & 0 \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla g(x, y) = J(\varphi)(x, y)^\top \nabla f(\varphi(x, y)) &= \begin{pmatrix} 0 & \big\langle \nabla f(x, x), (1, 1) \big\rangle \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 f(y, f(x, x)) \\ \partial_2 f(y, f(x, x)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \big\langle \nabla f(x, x), (1, 1) \big\rangle \partial_2 f(y, f(x, x)) \\ \partial_1 f(y, f(x, x)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. `[2pts]` On applique ici la "chain rule" en utilisant le calcul des gradients précédent. On a $g(x) = f \circ \varphi(x)$ où $\varphi(x) = (x, f(x, x))$ qui a pour matrice Jacobienne

$$J(\varphi)(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \big\langle \nabla f(x, x), (1, 1) \big\rangle \end{pmatrix}$$

On a

$$\begin{aligned} \nabla g(x) = J(\varphi)(x)^\top \nabla f(\varphi(x)) &= \begin{pmatrix} 1 & \big\langle \nabla f(x, x), (1, 1) \big\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_1 f(x, f(x, x)) \\ \partial_2 f(x, f(x, x)) \end{pmatrix} \\ &= \partial_1 f(x, f(x, x)) + \big\langle \nabla f(x, x), (1, 1) \big\rangle \partial_2 f(x, f(x, x)) \end{aligned}$$

****

Exercice 0.3

Une entreprise fabrique deux types de boisson, les types X et Y. Le type X se vend 1 euro au litre ; quant au type Y, il se vend à 3 euros le litre. Le coût de fabrication, exprimé en euros, est donné par la fonction suivante :

$$C(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 2xy - 2x - 1000$$

où x est le nombre de litres du type X et y est le nombre de litres du type Y. On suppose que les boissons fabriquées sont toutes écoulées sur le marché.

1. **Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le profit $P(x, y)$ réalisé par l'entreprise lorsqu'elle a vendu x litres du modèle X et y du modèle Y.**
2. **Etudier la convexité de $-P$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.**
3. **La capacité de production de l'entreprise est au total de 20 litres par jour. En supposant que l'entreprise tourne à plein régime (càd, elle produit 20 litres par jour), trouver la répartition optimale entre les boissons de type X et de type Y permettant de maximiser le profit quotidien. Calculer dans ce cas le profit réalisé.**
4. **Le conseil d'administration de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de produire à plein régime. Il se demande s'il ne peut pas augmenter le profit en produisant moins. Pouvez-vous conseiller le conseil d'administration ?**

****

Correction de l'exercice 0.3

1. `[1pt]` La fonction profit est donnée par

$$P(x, y) = x + 3y - C(x, y) = -5x^2 - 5y^2 + 2xy + 3(x + y) + 1000.$$

2. `[2pts]` Pour étudier la convexité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, il suffit d'étudier sa Hessienne. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\nabla^2 P(x, y) = \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 2 & -10 \end{pmatrix} := H$$

et H a deux valeurs propres λ_1 et λ_2 solution de $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}(H) = -20$ et $\lambda_1 * \lambda_2 = \det(H) = 96$. On a donc $\lambda_1 = -8$ et $\lambda_2 = -12$. Alors P est strictement concave et donc $-P$ est strictement convexe.

3. `[4pts]` On veux maximiser le profit sous les contraintes que $x + y = 20$ (càd l'entreprise tourne à plein régime) et $x, y \geq 0$ (on produit un nombre positif de litres de boisson). On est alors amener à résoudre un problème d'optimisation sous contrainte de la forme

$$\min_{(x,y)\in K} f(x, y) \tag{1}$$

où $f(x, y) = -P(x, y)$ et la contrainte K est donnée par

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(x, y) = 0, h_1(x, y) \leq 0 \text{ et } h_2(x, y) \leq 0\right\}$$

où $g_1(x, y) = x + y - 20$, $h_1(x, y) = -x$ et $h_2(x, y) = -y$. La contrainte est un compact de $\mathbb{R}^2$ et la fonction objectif est continue donc d'après Weierstrass, le problème (1) admet au moins une solution. Par ailleurs, f est strictement convexe et la contrainte K est convexe donc cette solution est unique. De plus, la contrainte est qualifiée (en tout point) vue que g_1, h_1, h_2 sont des fonctions affines. Par ailleurs, la fonction objectif est de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe alors d'après KKT, $u^* = (x^*, y^*) \in K$ est solution de (1) si et seulement si il existe λ_1, μ_1, μ_2 tels que

KKT1 $\nabla f(u^*) + \lambda_1 \nabla g_1(u^*) + \mu_1 \nabla h_1(u^*) + \mu_2 \nabla h_2(u^*) = 0$

KKT2 $\mu_1, \mu_2 \geq 0$

KKT3 $\mu_1 h_1(u^*) = 0$ et $\mu_2 h_2(u^*) = 0$.

On voit que satisfaire aux contraintes KKT1, 2, 3 et $(x, y) \in K$ est équivalent à résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{c} 10x - 2y - 3 + \lambda_1 - \mu_1 = 0 \\ 10y - 2x - 3 + \lambda_1 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1, \mu_2 \geq 0 \\ \mu_1 x = 0, \mu_2 y = 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, x + y = 20. \end{array}\right.$$

On peut d'abord essayer $x > 0$ et $y > 0$. Dans ce cas, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et donc le système précédant a pour unique solution $x = y = 10$. Par unicité de la solution de (1), $(10, 10)$ est l'unique solution du probléme. Le profit atteint vaut $P(10, 10) = 260$.

4. `[3pts]` Le problème est identique au précédent sauf qu'on change la contrainte d'égalité "$g_1(x, y) = 0$" par "$h_3(x, y) \leq 0$" où $h_3(x, y) = x + y - 20$. Les CNS de KKT deviennent alors équivalentes à

$$\left\{\begin{array}{c} 10x - 2y - 3 + \mu_3 - \mu_1 = 0 \\ 10y - 2x - 3 + \mu_3 - \mu_2 = 0 \\ \mu_1, \mu_2, \mu_3 \geq 0 \\ \mu_1 x = 0, \mu_2 y = 0, \mu_3(x + y - 20) = 0 \\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 20. \end{array}\right.$$

On essaie d'abord $x > 0$, $y > 0$ et $x + y < 20$ (càd la solution est strictement à l'intérieure de la contrainte). Dans ce cas $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ et en résolvant le système précédant, on obtient que $x = y = 3/8$ est solution du problème. Pour ce choix, le profit est $P(3/8, 3/8) = 8009/8 \approx 1001.125$ qui est bien plus grand que $P(10, 10) = 260$ quand l'usine tourne à plein régime. Le conseil à donner au CA est donc bien de produire 3/8-ième de litre de X et de Y et de ne pas faire tourner l'usine à plein régime.