

# Introduction au Compressed sensing. Méthodes de points intérieurs

Guillaume Lécué<sup>1</sup>

## Résumé

Dans ce chapitre, nous présentons deux algorithmes de points intérieurs pour résoudre des problèmes de programmation linéaires. Les deux algorithmes sont des méthodes de barrière dont les itérations évoluent à l'intérieur du polytope des contraintes. Cette approche diffère de celle de la méthode du simplexe qui elle évolue sur les sommets du polytope des contraintes.

On utilisera la dualité Lagrangienne pour la construction des méthodes de points intérieurs. Le premier algorithme est une méthode dite primale qui choisit les directions de descentes uniquement à partir du problème primal. Le deuxième algorithme utilise le problème dual pour choisir les directions de descente.

La présentation de ces deux algorithmes donne l'occasion de rappeler des outils utiles pour l'étude et la construction d'algorithmes pour des problèmes d'optimisation : dualité Lagrangienne, conditions KKT, directions de descentes et méthodes de barrière.

## 1 Introduction

L'algorithme du simplexe se "promène" sur les sommets du polytope des contraintes de proche en proche tout en assurant la décroissance de la fonction objectif. Quand il atteint un sommet pour lequel la fonction objectif ne peut plus être minimisé sur un des sommets voisins alors l'algorithme s'arrête et renvoie le sommet atteint qui est solution du problème.

Cet algorithme a d'excellentes performances en pratique : en général, il renvoie une solution au problème en un temps linéaire en le nombre de contraintes. Cependant, il existe un exemple appelé le "twisted cube" ou le cube de Klee-Minty pour lequel il a été démontré que l'algorithme du simplexe nécessite un temps exponentiel en le nombre de contraintes pour se terminer. Pour le cas du cube de Klee-Minty, l'algorithme du simplexe visite tous les sommets de ce cube qui en a  $2^m$  en dimension  $m$  où  $m$  est le nombre de contraintes du problème de programmation linéaire.

Le comportement théoriquement en temps exponentiel de l'algorithme du simplexe a longtemps perturbé les chercheurs car il contredisait son comportement observé en pratique qui lui est généralement linéaire. Beaucoup de recherches ont alors tenté de trouver une manière de choisir le pivot, à chaque itération de la méthode du simplexe, de telle sorte que l'algorithme en résultant ait un comportement en temps linéaire. Ce problème est toujours ouvert de nos jours (cf. Problème 9 de la liste "Mathematical problems for the next century" de Steve Smale). Néanmoins, une explication basée sur un argument de perturbations (qui sont dues en pratique aux erreurs machine) de l'excellent comportement en pratique de cet algorithme peut être trouvé dans [6].

Neuf ans après la construction du cube de Klee-Minty, [2] a proposé l'algorithme de l'ellipsoïde qui permet de résoudre en temps polynomial tout problème de programmation linéaire. La clef de cette solution était d'autoriser l'algorithme à évoluer à *l'intérieur du polytope des contraintes*

---

1. CNRS, CREST, ENSAE. Bureau E31, 3 avenue Pierre Larousse. 92 245 Malakof. Email : guillaume.lecue@ensae.fr.

et non seulement à sa surface comme le fait l'algorithme du simplexe. L'algorithme de l'ellipsoïde est le premier exemple d'algorithme de points intérieurs.

Cependant l'algorithme du simplexe reste beaucoup plus performant en pratique que l'algorithme de l'ellipsoïde. Le problème de trouver un algorithme aussi performant en pratique que l'algorithme du simplexe mais ayant une assurance théorique d'être résoluble en temps polynomial n'a été résolu qu'en 1984 par l'algorithme de projection de [3]. Dans [1], les auteurs ont montré que l'algorithme de projection était en fait un **algorithme de barrière**. C'est cet algorithme que nous présentons dans ce chapitre sous l'angle "moderne" des **méthode de barrière primal**. Puis, nous utiliserons des informations sur le problème dual associé pour construire un deuxième algorithme de point intérieur de la famille des **méthode de barrière dual-primal**.

Avant de présenter ces deux algorithmes, nous introduisons quelques outils généraux de l'optimisation convexe différentiable qui vont nous servir à comprendre les méthodes de points intérieurs.

## 2 Outils d'optimisations convexe différentiable

Dans cette section, nous rappelons quelques outils de la théorie de l'optimisation qui vont nous servir à la construction de deux algorithmes de points intérieurs pour la résolution des problèmes de programmation linéaire.

On considère un problème d'optimisation sous contrainte de la forme suivante : soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $f, (g_e)_{e \in \mathcal{E}}, (h_i)_{i \in \mathcal{I}} : U \mapsto \mathbb{R}$  des fonctions où  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{I}$  sont des ensembles finis. On considère le problème d'optimisation sous-contraintes

$$\boxed{\min_{x \in K} f(x) \text{ où } K = \left\{ x \in U : \begin{array}{ll} h_i(x) \leq 0 & \text{pour } i \in \mathcal{I} \\ g_e(x) = 0 & \text{pour } e \in \mathcal{E} \end{array} \right\}} \quad (\text{P})$$

où on suppose que  $K$  est non vide.

On remarque qu'on note " $\min_{x \in K} f(x)$ " et non pas " $\inf_{x \in K} f(x)$ " dans (P) alors qu'on n'est pas sûr que  $f$  atteint bien son infimum sur  $K$ . C'est une convention d'écriture en optimisation : on écrira les problèmes d'optimisation avec min et max avant même d'avoir vérifié que les bornes sont bien atteintes. Néanmoins, un bon réflexe est d'assurer que les bornes sont atteintes par un argument de compacité ou de coercivité, par exemple.

### 2.1 Dualité Lagrangienne

La dualité Lagrangienne permet de résoudre un problème sous contraintes à l'aide d'un autre problème plus simple à résoudre : le problème dual. On introduit d'abord une fonction dont les *points-selles* joueront un rôle central par la suite.

**Définition 2.1.** La **fonction de Lagrange** associée au problème d'optimisation sous contraintes (P) est définie par

$$L : \begin{cases} U \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, \alpha, \beta) & \longrightarrow f(x) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i h_i(x) + \sum_{e \in \mathcal{E}} \beta_e g_e(x). \end{cases}$$

Les vecteurs  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathcal{I}}$  et  $(\beta_e)_{e \in \mathcal{E}}$  sont appelés **multiplicateurs de Lagrange**.

La fonction de Lagrange permet de "transformer" le problème d'optimisation sous contraintes (P) en un problème d'optimisation convexe sous des contraintes plus simples que celles données par  $K$ . Le lien entre (P) et  $L$  est donné par la proposition suivante.

**Proposition 2.2.** *On a :*

$$\sup_{\alpha \geq 0, \beta} L(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $\alpha \geq 0$  signifie que  $\alpha_i \geq 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$  quand  $\alpha = (\alpha_i)_{i \in \mathcal{I}}$ .

*Démonstration.* Si  $x \in K$  alors  $h_i(x) \leq 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$  et  $g_e(x) = 0$  pour tout  $e \in \mathcal{E}$  et donc pour tout  $\alpha \geq 0$  et  $\beta$

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i h_i(x) + \sum_{e \in \mathcal{E}} \beta_e g_e(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i h_i(x) \leq 0$$

qui est atteint en  $\alpha = 0$  et n'importe quel  $\beta$ . On a alors  $\max_{\alpha \geq 0, \beta} L(x, \alpha, \beta) = f(x)$ .

Maintenant si  $x \notin K$  alors une des conditions de  $K$  n'est pas satisfaite par  $x$  : soit  $h_i(x) > 0$  pour un certain  $i \in \mathcal{I}$  ou  $g_e(x) \neq 0$  pour un certain  $e \in \mathcal{E}$ . Dans les deux cas

$$\max_{\alpha \geq 0, \beta} \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i h_i(x) + \sum_{e \in \mathcal{E}} \beta_e g_e(x) = +\infty.$$

Ce qui conclut la preuve. ■

D'après Proposition 2.2, on a

$$\min_{x \in K} f(x) = \inf_{x \in U} \sup_{\alpha \geq 0, \beta} L(x, \alpha, \beta). \quad (2.1)$$

On remarque que dans le terme de droite le minimum n'est plus contraint : on minimise une fonction sur tout  $U$  et non plus sur  $K \subset U$ . On retrouve donc le problème initial (P) en maximisant la fonction de Lagrange en les variables de Lagrange puis en minimisant en  $x \in U$ .

La dualité de Lagrange consiste à identifier les situations pour lesquelles, on peut intervertir  $\min_{x \in U}$  et  $\sup_{\alpha \geq 0, \beta}$  dans le membre de droite de (2.1). On peut déjà identifier un résultat immédiat qui est vrai sans aucune condition.

**Proposition 2.3** (dualité faible). *On a :*

$$\sup_{\alpha \geq 0, \beta} \inf_{x \in U} L(x, \alpha, \beta) \leq \inf_{x \in U} \sup_{\alpha \geq 0, \beta} L(x, \alpha, \beta). \quad (2.2)$$

*Démonstration.* Pour tout  $x \in U, \alpha \geq 0$  et  $\beta$ , on a

$$\inf_{x \in U} L(x, \alpha, \beta) \leq L(x, \alpha, \beta).$$

Alors, en passant au supremum sur tout  $\alpha \geq 0$  et  $\beta$  et en prenant ensuite l'infimum sur  $x \in U$ , on obtient le résultat. ■

Le résultat de la Proposition 2.3 est un résultat de dualité faible puisqu'il est toujours vrai. L'inégalité inverse ne l'est pas toujours et nécessite des hypothèses sur les fonctions  $f, (h_i)_{i \in \mathcal{I}}, (g_e)_{e \in \mathcal{E}}$ . On peut réécrire cette dualité faible en fonction de la fonction duale de Lagrange qui sera utilisée plus tard comme fonction-objectif du problème dual associé à (P).

**Définition 2.4.** *La fonction duale de Lagrange est*

$$D : \begin{cases} \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \longrightarrow \inf_{x \in U} L(x, \alpha, \beta). \end{cases}$$

Il est important de noter que le problème d'optimisation qui définit la fonction duale de Lagrange  $D$  est un problème non-contraint qui peut donc être résolu de manière classique. Par exemple, si  $f, (h_i), (g_e)$  sont différentiables et si  $\inf_{x \in U} L(x, \alpha, \beta)$  est atteint alors il est atteint en un point critique de  $L(\cdot, \alpha, \beta)$  c-à-d par un point vérifiant une condition de premier ordre  $\nabla_x L(x, \alpha, \beta) = 0$ . On peut donc dans de nombreux cas construire la fonction duale  $D$ . Cette fonction nous servira de fonction-objectif dans le problème dual.

**Définition 2.5.** *Le problème duale de Lagrange est le problème d'optimisation*

$$\boxed{\max_{\alpha, \beta} D(\alpha, \beta) \text{ tel que } \alpha \geq 0.} \quad (\text{D})$$

Le problème initial (P) est appelé **problème primal**.

L'intérêt du problème dual sur le problème primal est :

- la contrainte  $\alpha \geq 0$  est en général plus facile que  $K$
- l'ensemble de contraintes de (D)  $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  est convexe et la fonction-objectif  $D$  de (D) est concave.

On remarque au passage qu'une fois de plus on note " $\max_{\alpha, \beta} D(\alpha, \beta)$ " au lieu de " $\sup_{\alpha, \beta} D(\alpha, \beta)$ " avant même de s'être assuré de l'existence d'une maximum (c'est comme pour (P) une convention d'écriture).

**Proposition 2.6.** *La fonction duale de Lagrange  $D$  est concave.*

*Démonstration.* Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $(\alpha, \beta) \rightarrow L(x, \alpha, \beta)$  est linéaire. Alors  $D(\alpha, \beta)$  est l'infimum d'une famille de fonctions concaves, elle est donc aussi concave. ■

Le problème dual de Lagrange (D) est un problème de maximisation d'une fonction concave sur un ensemble convexe. C'est donc un problème d'optimisation convexe qui est en général plus facile à résoudre que le problème (P).

Il nous reste donc à faire un lien entre problème duale et problème primal. On souhaite en particulier identifier des situations pour lesquelles résoudre le problème primal servira à résoudre le problème primal (en général plus difficile). Ces situations sont identifiées par l'existence de *point-selle* pour  $L$  qui sont eux-mêmes caractérisés par la *dualité forte*.

On peut réécrire la propriété de dualité faible ainsi :

$$D^* := \sup_{\alpha \geq 0, \beta} D(\alpha, \beta) \leq \inf_{x \in K} f(x) := J^*. \quad (2.3)$$

On a donc  $J^* - D^* \geq 0$ .

**Définition 2.7.** *La quantité  $J^* - D^*$  est appelée **duality gap**. Quand le duality gap est nul, on dit qu'on a **dualité forte**.*

D'après la Proposition 2.3, le *duality gap* est toujours positif. On va dans la suite identifier des situations de dualité forte c-à-d quand  $D^* = J^*$  autrement dit quand le *duality gap* est nul.

On fait maintenant le lien entre dualité forte et existence de point-selle pour  $L$ .

**Définition 2.8.** *On dit que  $(x^*, \alpha^*, \beta^*) \in U \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  est un **point-selle** de  $L$  quand pour tout  $x \in U$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ , on a*

$$L(x^*, \alpha, \beta) \leq L(x^*, \alpha^*, \beta^*) \leq L(x, \alpha^*, \beta^*).$$

On considère la fonction  $\varphi(x) = \sup_{\alpha \geq 0, \beta} L(x, \alpha, \beta)$  définie pour tout  $x \in U$ . Dans le cas particulier de la fonction de Lagrange  $L$ , on a

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

En fait, la forme exacte de  $\varphi$  n'a pas d'importance pour l'étude des points-selles d'une fonction  $L$  en général.

**Proposition 2.9.** *Soit  $L : U \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|} \mapsto \mathbb{R}$  et  $(x^*, \alpha^*, \beta^*) \in U \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ . Il y a équivalence entre les points suivants :*

1.  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  est un point-selle de  $L$
2.  $x^*$  minimise  $\varphi$  sur  $U$ ,  $(\alpha^*, \beta^*)$  maximise  $D$  sur  $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ , le duality gap est nul et  $\varphi(x^*) = J^* = D^* = D(\alpha^*, \beta^*)$ .

*Démonstration.* On montre que 1. implique 2.. Si  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  est un point-selle de  $L$  alors pour tout  $x \in U$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ , on a

$$L(x^*, \alpha, \beta) \underset{(a)}{\leq} L(x^*, \alpha^*, \beta^*) \underset{(b)}{\leq} L(x, \alpha^*, \beta^*).$$

En particulier,

$$\begin{aligned} J^* &= \inf_{x \in K} f(x) = \inf_{x \in U} \sup_{\alpha \geq 0, \beta} L(x, \alpha, \beta) \leq \sup_{\alpha \geq 0, \beta} L(x^*, \alpha, \beta) \\ &\underset{\text{par}(a)}{\leq} L(x^*, \alpha^*, \beta^*) \\ &\underset{\text{par}(b)}{\leq} \inf_{x \in U} L(x, \alpha^*, \beta^*) \leq \sup_{\alpha \geq 0, \beta} \inf_{x \in U} L(x, \alpha, \beta) = \sup_{\alpha \geq 0, \beta} D(\alpha, \beta) = D^*. \end{aligned}$$

On a donc bien  $J^* \leq D^*$ . Par ailleurs, on a toujours  $D^* \leq J^*$  (cf. Proposition 2.3 sur la dualité faible). On a donc bien  $D^* = J^*$  qui est la définition de la dualité forte.

Par ailleurs, pour tout  $x \in U$ , on a

$$\varphi(x^*) = \sup_{\alpha \geq 0, \beta} L(x^*, \alpha, \beta) \leq L(x^*, \alpha^*, \beta^*) \leq L(x, \alpha^*, \beta^*) \leq \sup_{\alpha \geq 0, \beta} L(x, \alpha, \beta) = \varphi(x).$$

On a donc bien que  $x^*$  minimise  $\varphi$  sur  $U$ . De même, pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ , on a

$$D(\alpha^*, \beta^*) = \inf_{x \in U} L(x, \alpha^*, \beta^*) \geq L(x^*, \alpha^*, \beta^*) \geq L(x^*, \alpha, \beta) \geq \inf_{x \in U} L(x, \alpha, \beta) = D(\alpha, \beta).$$

On en déduit que  $(\alpha^*, \beta^*)$  maximise  $D$  sur  $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ .

On a aussi

$$\varphi(x^*) = J^* = L(x^*, \alpha^*, \beta^*) = D^* = D(\alpha^*, \beta^*).$$

On montre que 2. implique 1.. On a  $\varphi(x^*) \leq D(\alpha^*, \beta^*)$ . On a alors pour tout  $x \in U$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ ,

$$L(x^*, \alpha, \beta) \leq \varphi(x^*) \leq D(\alpha^*, \beta^*) \leq L(x, \alpha^*, \beta^*).$$

Ceci étant vrai pour tout  $x \in U$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ , on a donc  $L(x^*, \alpha, \beta) \leq L(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  et  $L(x^*, \alpha^*, \beta^*) \leq L(x^*, \alpha, \beta)$ . Donc,  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  est un point-selle de  $L$ . ■

Dans le cas où  $L$  est la fonction de Lagrange associée à (P), dire que “ $x^*$  minimise  $\varphi$  sur  $U$ ” est équivalent à “ $x^*$  est solution de (P)”. On voit donc que chercher les points-selles de  $L$  permet de trouver les solutions du problème initial. De plus la Proposition 2.9 est vraie pour n’importe quelle fonction  $L$  à “deux” variable  $x$  et  $(\alpha, \beta)$ . Dans le cas particulier où  $L$  est la fonction de Lagrange associée à (P) on peut simplifier la Proposition 2.9.

**Théorème 2.10.** *Soit  $L$  la fonction de Lagrange associée au problème (P). Soit  $(x^*, \alpha^*, \beta^*) \in U \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ . Il y a équivalence entre les deux points suivants :*

1.  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  est un point-selle de  $L$  sur  $U \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$
2. *i)  $x^*$  minimise  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*)$  sur  $U$   
ii)  $x^* \in K$   
iii)  $\alpha_i^* h_i(x^*) = 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ .*

*Démonstration.* On montre que 1. implique 2.. On a pour tout  $x \in U$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  :

$$L(x^*, \alpha, \beta) \underset{(a)}{\leq} L(x^*, \alpha^*, \beta^*) \underset{(b)}{\leq} L(x, \alpha^*, \beta^*).$$

Par (b),  $x^*$  minimise  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*)$  donc i) est vrai. Par (a), on a

$$\sup_{\alpha \geq 0, \beta} L(x^*, \alpha, \beta) \leq L(x^*, \alpha^*, \beta^*) < \infty$$

mais si  $x^* \notin K$  alors  $h_i(x^*) > 0$  pour un  $i \in \mathcal{I}$  ou  $g_e(x^*) \neq 0$  pour un  $e \in \mathcal{E}$  et dans ce cas  $\sup_{\alpha \geq 0, \beta} L(x^*, \alpha, \beta) = +\infty$ . On a donc bien  $x^* \in K$  càd ii) est vrai.

Comme  $x^* \in K$ , on peut réécrire (a) : pour tout  $\alpha \geq 0$

$$f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i h_i(x^*) \leq f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i^* h_i(x^*)$$

et  $h_i(x^*) \leq 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ , donc

$$0 = \sup_{\alpha \geq 0} \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i h_i(x^*) \leq \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i^* h_i(x^*)$$

or  $\alpha_i^* \geq 0$  et  $h_i(x^*) \leq 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$  donc  $\sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i^* h_i(x^*) \geq 0$  uniquement lorsque  $\alpha_i^* h_i(x^*) = 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ . Donc iii) est bien vrai.

On montre que 2. implique 1.. Comme  $x^* \in K$  on a  $g_e(x^*) = 0$  pour tout  $e \in \mathcal{E}$  et comme  $\alpha_i^* h_i(x^*) = 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ , on a  $L(x^*, \alpha^*, \beta^*) = f(x^*)$ . De plus, pour tout  $\alpha \geq 0$  et  $\beta$ , on a

$$L(x^*, \alpha, \beta) = f(x^*) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i h_i(x^*) \leq f(x^*) = L(x^*, \alpha^*, \beta^*).$$

Par ailleurs,  $x^*$  minimise  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*)$  sur  $U$  donc

$$L(x^*, \alpha^*, \beta^*) \leq L(x, \alpha^*, \beta^*).$$

On en déduit que  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  est bien un point-selle de  $L$ . ■

On peut réécrire le Théorème 2.10 en faisant apparaître explicitement le rôle du problème dual sous l’hypothèse de dualité forte.

**Théorème 2.11.** *On suppose qu'on a dualité forte (càd que le duality gap est nul). Soit  $(x^*, \alpha^*, \beta^*) \in U \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ . On suppose que  $(\alpha^*, \beta^*)$  est solution du problème dual. Il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :*

1.  $x^*$  est solution de (P)
2. i)  $x^*$  minimise  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*)$  sur  $U$   
 ii)  $x^* \in K$   
 iii)  $\alpha_i^* h_i(x^*) = 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ .

*Démonstration.* D'après le Théorème 2.10, 2. est équivalent à  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  est un point-selle de  $L$ . Or d'après la Proposition 2.9,  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  est un point-selle de  $L$  si et seulement si  $x^*$  minimise  $\varphi$  sur  $U$ ,  $(\alpha^*, \beta^*)$  maximise  $D$  sur  $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  et le duality gap est nul. Comme on fait l'hypothèse que  $(\alpha^*, \beta^*)$  maximise  $D$  sur  $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  et que le duality gap est nul, on a l'équivalence entre 2. et " $x^*$  minimise  $\varphi$  sur  $U$ ". Par ailleurs, dans le cas où  $L$  est la fonction de Lagrange du problème (P), on a

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi " $x^*$  minimise  $\varphi$  sur  $U$ " si et seulement si  $x^*$  est solution de (P). ■

*Conclusion :* Quand il y a dualité forte, on peut trouver les solutions  $x^*$  de (P) en trouvant une solution  $(\alpha^*, \beta^*)$  au problème dual et en résolvant le système d'équations

- i)  $x^*$  minimise  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*)$  sur  $U$
- ii)  $x^* \in K$
- iii)  $\alpha_i^* h_i(x^*) = 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ .

*Ce résultat est vrai sans aucune hypothèse de régularité sur  $f, (h_i)_{i \in \mathcal{I}}, (g_e)_{e \in \mathcal{E}}$  ni de convexité.*

Pour pouvoir appliquer le résultat de dualité du Théorème 2.11, il faut pouvoir assurer que le duality gap est bien nul. Pour caractériser ces situations, on va avoir recours à deux notions classiques en optimisation : la qualification de contraintes et les conditions KKT.

## 2.2 Qualification de contraintes

Il existe une définition générale de la qualification d'une contrainte  $K$  en un point  $x \in K$ . Cependant elle fait intervenir des notions (cf. espace tangent) qui sortent du cadre de cette note de rappel. On ne va donc énoncer que des conditions suffisantes de qualification dans le cadre des **problèmes d'optimisation convexe différentiables (OCD)**, càd pour des problèmes de la forme

$$\min_{x \in K} f(x) \text{ où } K = \left\{ x \in U : \begin{array}{l} h_i(x) \leq 0, \forall i \in \mathcal{I} \\ Ax = b \end{array} \right\} \text{ et } \begin{array}{l} f, (h_i)_{i \in \mathcal{I}} \text{ sont convexes et } \mathcal{C}^1 \\ A \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ et } b \in \mathbb{R}^m \end{array} \quad (\text{P1})$$

où  $U$  est un ouvert convexe non vide de  $\mathbb{R}^n$ . On voit donc qu'en OCD, les contraintes d'égalité " $g_e(x) = 0, \forall e \in \mathcal{E}$ " sont des contraintes affines et  $f, (h_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sont des fonctions convexes  $\mathcal{C}^1$  (et donc  $U$  est un ensemble convexe).

Il existe un résultat établissant la dualité forte pour les problèmes de la forme (P1) sous condition de **qualification de contraintes**. Cependant ici on utilise qu'une condition suffisante de qualification de contraintes dite de Slater qui a le mérite d'être simple à énoncer.

**Définition 2.12.** On dit que la contrainte  $K$  définie par les fonctions  $(h_i)_{i \in \mathcal{I}}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$  satisfait la **condition de Slater** quand il existe  $x_0 \in K$  tel que

$$Ax_0 = b \text{ et } \begin{cases} h_i(x_0) \leq 0 & \text{pour tout } i \in \mathcal{I}_a \\ h_i(x_0) < 0 & \text{pour tout } i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_a \end{cases}$$

où  $\mathcal{I}_a \subset \mathcal{I}$  est l'ensemble de toutes les contraintes affines de  $K$  (càd, pour tout  $i \in \mathcal{I}_a$ ,  $h_i$  est une fonction affine).

**Théorème 2.13** (dualité forte en OCD). On suppose que la contrainte  $K$  satisfait les conditions de Slater pour le problème (P1) et que (P1) admet au moins une solution. Alors il y a dualité forte, autrement dit,

$$\min_{x \in K} f(x) = \max_{\alpha \geq 0, \beta} D(\alpha, \beta).$$

De plus, le problème dual admet au moins une solution  $(\alpha^*, \beta^*)$  et les solutions du problème  $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \alpha^*, \beta^*)$  sont solutions de (P1) et réciproquement.

La condition de Slater assurent donc la dualité forte pour des problèmes d'optimisation convexe pour des contraintes d'égalité affines. La preuve du Théorème 2.13 nécessite des outils qui sortent du cadre de cette note de rappel.

**Remarque 2.14** (Critère d'arrêt). La dualité forte permet aussi de définir un critère d'arrêt pour les algorithmes itératifs. En effet, si  $x^*$  est une solution primale et  $(\alpha^*, \beta^*)$  est une solution duale alors  $f(x^*) - D(\alpha^*, \beta^*) = 0$ . On peut alors se servir de la quantité  $f(x) - D(\alpha, \beta)$  comme d'un critère d'arrêt pour une algorithme itératif : si à l'étape  $k$  on a  $f(x^{(k)}) - D(\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) \leq \epsilon$  alors on stoppe les itérations pour un niveau de tolérance  $\epsilon$  donné en entrée.

**Remarque 2.15** (Qualification de contrainte en Programmation Linéaire). En Programmation Linéaire (PL), les contraintes d'égalité et les contraintes d'inégalité sont toutes affines. Dans ce cas, la condition de qualification de Slater est assurée sous la simple hypothèse que  $K$  est non vide.

### 2.3 Conditions KKT

On considère à nouveau le problème d'optimisation convexe différentiable sous contraintes (P1). Quand le duality gap est nul, il existe des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour les deux problèmes primal et dual. Ces conditions sont appelées conditions KKT du nom de leurs auteurs Karush, Kuhn et Tucker. On les énonce ci-dessous dans le cadre plus général de l'optimisation différentiable (non-nécessairement convexe).

**Définition 2.16.** Soit  $f, (h_i)_{i \in \mathcal{I}}, (g_e)_{e \in \mathcal{E}} : U \mapsto$  des fonctions différentiables sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  satisfait les **conditions KKT** quand, pour  $K = \{x \in U : h_i(x) \leq 0, \forall i \in \mathcal{I}, g_e(x) = 0, \forall e \in \mathcal{E}\}$ ,

$$x^* \in K \text{ et } \alpha^* \geq 0 \tag{KKT1}$$

$$\alpha_i^* h_i(x^*) = 0, \forall i \in \mathcal{I} \tag{KKT2}$$

$$\nabla_x L(x^*, \alpha^*, \beta^*) = 0 \tag{KKT3}$$

La condition (KKT2) est appelée **complementary slackness condition**.



La première conditions (KKT1) dit simplement que les éléments  $x^*$  et  $(\alpha^*, \beta^*)$  sont dans leur ensemble de contraintes respectifs (pour le primal et le dual). La condition (KKT2) signifie que soit  $h_i(x^*) = 0$ , càd la  $i$ -ième contrainte du problème primal est saturée, soit la  $i$ -ième contrainte du problème dual est saturée. Finalement, la troisième condition (KKT3) signifie que  $x^*$  est un point critique de  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*)$ .

**Théorème 2.17.** *On considère le problème d'optimisation sous contraintes (P) où  $f, (h_i)_{i \in \mathcal{I}}, (g_e)_{e \in \mathcal{E}}$  sont différentiables sur  $U$ . On a les résultats suivant :*

1. *si le duality gap est nul, si  $x^*$  est une solution primale et si  $(\alpha^*, \beta^*)$  est une solution duale, alors  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  satisfait les conditions KKT.*
2. *de plus, si on suppose que  $f, (h_i)_{i \in \mathcal{I}}$  et  $(g_e)_{e \in \mathcal{E}}$  sont convexes alors les conditions KKT sont suffisantes : si  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  satisfait KKT alors  $x^*$  est solution du problème primal,  $(\alpha^*, \beta^*)$  est solution du problème duale et le duality gap est nul.*

*Démonstration.* Le premier point est une conséquence directe de Proposition 2.9 et du Théorème 2.10. On a en effet l'équivalence :

1.  $x^*$  minimise  $\varphi$  sur  $U$  (ce qui équivaut à dire que  $x^*$  est solution primale),  $(\alpha^*, \beta^*)$  maximise  $D$  sur  $\mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$  (ce qui équivaut à dire que  $(\alpha^*, \beta^*)$  est solution duale), le duality gap est nul et  $\varphi(x^*) = J^* = D^* = D(\alpha^*, \beta^*)$ ,
2.  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  est un point-selle de  $L$ ,
3. i)  $x^*$  minimise  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*)$  sur  $U$   
ii)  $x^* \in K$   
iii)  $\alpha_i^* h_i(x^*) = 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ .

Dans le cas différentiable, le troisième point implique les conditions KKT vu que si  $x^*$  minimise  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*)$  sur  $U$  alors nécessairement  $x^*$  est un point critique de  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*)$  càd  $\nabla_x L(x^*, \alpha^*, \beta^*) = 0$  (dans Proposition 2.9 et Théorème 2.10, on suppose implicitement que  $\alpha^* \geq 0$ ).

On démontre le deuxième point sous l'hypothèse supplémentaire que  $f, (h_i)_{i \in \mathcal{I}}$  et  $(g_e)_{e \in \mathcal{E}}$  sont convexes. Soit  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  satisfaisant les conditions KKT. Condition (KKT1) assure que  $x^*$  et  $(\alpha^*, \beta^*)$  sont dans les ensembles de contraintes du problème primal et dual respectivement. Par ailleurs, comme  $\alpha^* \geq 0$ ,  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*) = f(\cdot) + \sum_{i \in \mathcal{I}} \alpha_i^* h_i(\cdot) + \sum_{e \in \mathcal{E}} \beta_e^* g_e(\cdot)$  est convexe et comme  $\nabla_x L(x^*, \alpha^*, \beta^*) = 0$ ,  $x^*$  est un minimum de  $L(\cdot, \alpha^*, \beta^*)$  sur  $U$  (en optimisation convexe différentiable les points critiques sont les extrema).

Ainsi la condition 2. dans Théorème 2.10 est satisfaite et donc 1. l'est aussi càd  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  est un point selle de  $L$  sur  $U \times \mathbb{R}_+^{|\mathcal{I}|} \times \mathbb{R}^{|\mathcal{E}|}$ . On en déduit par la Proposition 2.9 que  $x^*$  minimise  $\varphi$  sur  $U$  et donc  $x^*$  est solution primale, que  $(\alpha^*, \beta^*)$  est solution duale et que le duality gap est nul. ■

**Remarque 2.18.** *Pour un problème OCD (càd d'optimisation convexe différentiable), on suppose que les contraintes d'égalités sont affines. Dans le Théorème précédant (cf. Théorème 2.17), on a seulement supposé les  $g_e, e \in \mathcal{E}$  convexes dans le point 2..*

Dans la conclusion suivante, on combine les résultats du Théorème 2.13 et du Théorème 2.17.

*Conclusion* : Pour les problèmes d'optimisation convexe différentiables (OCD) (où  $(g_e)_{e \in \mathcal{E}}$  sont affines et  $f, (h_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sont différentiables et convexes) les conditions KKT sont nécessaires et suffisantes : il y a équivalence entre

1. le duality gap est nul,  $x^*$  est solution primal et  $(\alpha^*, \beta^*)$  est solution duale
2.  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  vérifie les conditions KKT.

De plus, pour les problèmes d'OCD vérifiant la condition de Slater, il y a équivalence entre

1.  $x^*$  est solution primal et  $(\alpha^*, \beta^*)$  est solution duale
2.  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  vérifie les conditions KKT.

Dans ce cas, pour trouver les solutions primales, il suffit de trouver une solution duale  $(\alpha^*, \beta^*)$  et de déterminer l'ensemble des points  $x^*$  tels que  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  vérifie les conditions KKT.

## 2.4 Dualité Lagrangienne et conditions KKT en programmation linéaire

Dans cette section, on applique les idées des sections précédentes (dualité Lagrangienne et conditions KKT) au cas particulier des problèmes d'optimisation en Programmation Linéaire sous forme standard

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle \text{ tel que } Ax = b, x \geq 0 \quad (\text{PPL})$$

où  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . On rappelle que  $x \geq 0$  signifie que  $x_j \geq 0$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$  quand  $x = (x_j)_j$ .

On suppose que l'ensemble de contrainte  $K = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$  est non vide (sinon le problème (PPL) n'est pas défini). Ainsi la condition de Slater est vérifiée. Par ailleurs, la fonction objectif  $x \mapsto \langle x, c \rangle$  est convexe de classe  $\mathcal{C}^1$  et les contraintes " $Ax = b, x \geq 0$ " sont affines. On peut donc appliquer les principaux résultats des sections précédentes, à savoir Théorème 2.13 et Théorème 2.17.

La fonction de Lagrange est ici

$$L(x, \alpha, \beta) = \langle c, x \rangle - \langle \alpha, x \rangle + \langle \beta, b - Ax \rangle = \langle c - \alpha - A^\top \beta, x \rangle + \langle \beta, b \rangle$$

définie pour tout  $x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in (\mathbb{R}_+)^n$  et  $\beta \in \mathbb{R}^m$ . La fonction duale de Lagrange est définie pour tout  $\alpha \in (\mathbb{R}_+)^n$  et  $\beta \in \mathbb{R}^m$  par

$$D(\alpha, \beta) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} L(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} -\infty & \text{quand } A^\top \beta + \alpha \neq c \\ \langle \beta, b \rangle & \text{quand } A^\top \beta + \alpha = c. \end{cases}$$

Le problème dual  $\max_{\alpha \geq 0, \beta} D(\alpha, \beta)$  est donc ici

$$\max_{\alpha, \beta} \langle b, \beta \rangle \text{ tel que } A^\top \beta + \alpha = c, \alpha \geq 0 \quad (\text{DPL})$$

C'est aussi un problème de programmation linéaire.

On rappelle que la condition de Slater (càd il existe un  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Ax = b$  et  $h_i(x) = -x_i \leq 0, i = 1, \dots, n$ ) est satisfaites ici car  $K$  est supposé non-vide. On a donc de la dualité forte (cf. Théorème 2.13) et d'après les conditions KKT (cf. Théorème 2.17) il y a équivalence entre :

1.  $x^*$  est solution de (PPL) et  $(\alpha^*, \beta^*)$  est solution de (DPL)
2.  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  vérifie les conditions de KKT :

$$(KKT1) : Ax^* = b, x^* \geq 0 \text{ et } \alpha^* \geq 0$$

$$(KKT2) : \alpha_i^* x_i^* = 0, \forall i = 1, \dots, n$$

$$(KKT3) : 0 = \nabla_x L(x^*, \alpha^*, \beta^*) = -A^\top \beta^* - \alpha^* + c$$

On peut vérifier que le dual du problème dual (DPL) est ici le problème primal (PPL). En effet, le lagrangien de (DPL) est

$$\tilde{L}(\alpha, \beta, x, y) = -\langle b, \beta \rangle + \langle x, A^\top \beta + \alpha - c \rangle - \langle y, \alpha \rangle = \langle Ax - b, \beta \rangle + \langle x - y, \alpha \rangle - \langle x, c \rangle$$

où  $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}_+)^m$  est ici le multiplicateur de Lagrange. Puis, la fonction duale de Lagrange est ici définie pour tout  $y \geq 0, x$  par

$$\tilde{D}(x, y) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m} \tilde{L}(\alpha, \beta, x, y) = \begin{cases} -\infty & \text{quand } Ax \neq b \text{ ou } x \neq y \\ -\langle c, x \rangle & \text{quand } Ax = b \text{ et } x = y. \end{cases}$$

Le problème duale  $\max_{y \geq 0, x} \tilde{D}(x, y)$  est alors

$$\max_{x, y} \left( -\langle c, x \rangle : Ax = b \text{ et } x = y \text{ et } y \geq 0 \right)$$

qui est bien équivalent à (PPL).

On peut donc de nouveau appliquer la dualité Lagrangienne et obtenir la caractérisation des solutions aux problèmes primal et dual par les conditions KKT qui sont identiques à celles obtenues précédemment.

**Théorème 2.19.** *Si le problème primal (PPL) a une solution ou si le problème dual (DPL) a une solution alors c'est aussi le cas pour l'autre et les fonctions objectifs sont égales. Si un des problèmes n'est pas borné alors l'ensemble des contraintes de l'autre est vide. Par ailleurs, on a l'équivalence entre :*

1.  $x^*$  est solution de (PPL) et  $(\alpha^*, \beta^*)$  est solution de (DPL)
2.  $(x^*, \alpha^*, \beta^*)$  vérifie les conditions de KKT :

$$Ax^* = b, x^* \geq 0 \text{ et } \alpha^* \geq 0; \quad \alpha_i^* x_i^* = 0, \forall i = 1, \dots, n; \quad A^\top \beta^* + \alpha^* = c.$$

## 2.5 Directions de descentes (de Newton)

### 2.5.1 Méthode de Newton pour résoudre "F(x) = 0"

Soit  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction différentiable sur  $\mathbb{R}$ . On souhaite trouver  $x^* \in \mathbb{R}$  tel que  $F(x^*) = 0$ . La méthode de Newton consiste à approcher la fonction  $F$  par son développement du premier ordre de Taylor (en chaque point de l'itération) : en tout point  $x \in \mathbb{R}$  le développement de Taylor d'ordre 1 est donné pour tout  $p \in \mathbb{R}$  par

$$F(x + p) = F(x) + F'(x)p + o(p).$$

Ainsi, si on choisit  $p^*$  tel que

$$F(x) + F'(x)p^* = 0 \tag{2.4}$$

on aura  $F(x + p^*) = o(p^*)$  et donc si  $p^*$  est petit, on aura  $F(x + p^*)$  qui sera proche de zéro, et donc  $x + p^*$  sera une solution approchante au problème qu'on souhaite résoudre ici.

L'algorithme de Newton pour résoudre "F(x) = 0" est un algorithme itératif qui part d'un point initial donné (ou choisit) et s'arrête lorsqu'un critère d'arrêt (décidé en amont) est rencontré :

**input** :  $x_0$  : un point initial;  $\epsilon > 0$  : un paramètre de critère d'arrêt

**output**: une approximation  $x_k$  de  $x^*$  tel que  $F(x^*) = 0$

1 **while**  $|x_{k+1} - x_k| \geq \epsilon$  **do**

2     Calcul de  $p_k$ , une **direction de descente**, solution de  $F(x_k) + F'(x_k)p_k = 0$

3      $x_{k+1} = x_k + p_k$

4 **end**

**Algorithm 1:** Algorithme de Newton pour  $F(x) = 0$ .

On voit ici que le choix de la direction de descente  $p_k$  au point  $x_k$  est donnée par l'équation 2.4 qui consiste à annuler le développement du premier ordre de  $F$  en  $x_k$ . Quand  $F'(x_k) \neq 0$  alors la direction de descente est donnée par  $p_k = -F(x_k)/F'(x_k)$  qui est la forme classique de l'algorithme de Newton :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}.$$

### 2.5.2 Descente de gradient et algorithme de Newton

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe deux fois différentiable. On souhaite trouver une solution au problème  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ .

Par convexité et différentiabilité de  $f$ , résoudre ce problème est équivalent à résoudre le problème  $f'(x) = 0$ . On est donc amené à résoudre un problème du type  $F(x) = 0$  pour  $F = f'$  qu'on peut résoudre de manière approchée par la méthode de Newton vue dans la section précédente.

Dans le cadre de la minimisation d'une fonction convexe, la méthode de Newton est un exemple particulier de **méthode de descente de gradient**.

Pour le problème de minimisation  $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x)$  d'une fonction convexe, la méthode de Newton consiste à minimiser une approximation de Taylor du second ordre de  $f$  : pour tout  $x, p \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x+p) = f(x) + f'(x)p + \frac{p^2 f''(x)}{2} + o(p^2).$$

Minimiser la fonction convexe  $p \rightarrow f(x) + f'(x)p + (1/2)p^2 f''(x)$  revient à trouver un zéro de son gradient :  $p^*$  tel que

$$f'(x) + f''(x)p^* = 0$$

qui est exactement la même équation que celle définissant la direction de descente pour la méthode de Newton dans (2.4) pour  $F = f'$ .

**input** :  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  : un point initial;  $\epsilon > 0$  : un paramètre de critère d'arrêt

**output**: une approximation  $x_k \in \mathbb{R}^n$  de  $x^*$  tel que  $f(x^*) = \min_x f(x)$

1 **while**  $|x_{k+1} - x_k| \geq \epsilon$  **do**

2     Calcul de  $p_k$ , une **direction de descente**, solution de  $f'(x_k) + f''(x_k)p_k = 0$

3      $x_{k+1} = x_k + p_k$

4 **end**

**Algorithm 2:** Algorithme de Newton pour le problème  $\min_x f(x)$ .

Ainsi quand  $f''(x_k) \neq 0$ , la direction de descente est donnée par  $p_k = -f'(x_k)/f''(x_k)$ .

Dans certain cas, il est coûteux, voire impossible de calculer  $f''(x_k)$ . On a donc recours à une suite donnée a priori, ou calculée au fil des itérations, qu'on appelle les **steps size** :  $(\eta_k)_k$  où  $\eta_k > 0$ . La direction de descente est obtenue à l'étape  $k$  comme étant solution de l'équation

$$f'(x) + \frac{p_k}{\eta_k} = 0.$$

On a donc "remplacer" la quantité difficile à obtenir  $f''(x_k)$  par  $1/\eta_k$ . La direction de descente ainsi obtenue est  $p_k = -\eta_k f'(x_k)$  et l'algorithme associé est

$$x_{k+1} = x_k - \eta_k f'(x_k)$$

qui est l'algorithme de **descente de gradient**. L'algorithme de Newton est donc un algorithme de descente de gradient pour le step size  $\eta_k = 1/f''(x_k)$ .

### 2.5.3 Algorithme de Newton pour des fonctions de plusieurs variables

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe deux fois différentiable. On souhaite résoudre le problème d'optimisation  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ .

La méthode de Newton consiste à approcher  $f$  au point courant  $x_k$  par son développement d'ordre 2 de Taylor :

$$f(x_k + p) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), p \rangle + \frac{1}{2} p^\top \nabla^2 f(x_k) p + o(\|p\|_2^2)$$

et à minimiser en  $p \in \mathbb{R}^n$  cette approximation. L'approximation étant convexe et différentiable, cela revient à annuler son gradient. On obtient donc une direction de descente  $p_k$  solution de l'équation :

$$\nabla f(x_k) + \nabla^2 f(x_k) p_k = 0 \tag{2.5}$$

où  $\nabla f(x) = (\partial_i f(x))_{i=1}^n$  est le **gradient** de  $f$  en  $x$  et  $\nabla^2 f(x) = (\partial_i \partial_j f(x))_{1 \leq i, j \leq n}$  est la matrice **Hessienne** de  $f$  en  $x$ .

Ainsi, quand  $\nabla^2 f(x_k)$  est inversible, la direction de descente est donnée par

$$p_k = -(\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$$

et l'algorithme de Newton associé est décrit dans Algorithme 3.

**input** :  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  : un point initial;  $\epsilon > 0$  : un paramètre de critère d'arrêt

**output**: une approximation  $x_k \in \mathbb{R}^n$  de  $x^*$  tel que  $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$

```

1 while  $\|x_{k+1} - x_k\|_2 \geq \epsilon$  do
2   |  $x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$ 
3 end
```

**Algorithm 3:** Algorithme de Newton pour la construction d'une solution approchante au problème  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ .

L'algorithme de Newton converge très rapidement vers la solution du problème d'optimisation  $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$  quand  $x \rightarrow \nabla^2 f(x)$  est Lipshitz et  $\nabla^2 f(x)$  a une plus petite valeur singulière plus grande que  $c$  uniformément en  $x$ . On rappelle la définition de la norme d'opérateur d'une matrice :

$$\|M\| = \max_{\|x\|_2=1} \|Mx\|_2.$$

C'est la norme de  $M$  vue comme opérateur de  $\ell_2^n \mapsto \ell_2^n$ . En particulier, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|Mx\|_2 \leq \|M\| \|x\|_2$ .

**Théorème 2.20.** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe deux fois différentiable. On suppose qu'il existe  $x^* \in \mathbb{R}^n$  tel que  $f(x^*) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$ . On suppose que :*

i)  $\nabla^2 f$  est  $L$ -Lipshitz pour la norme d'opérateur : pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\|\nabla^2 f(x) - \nabla^2 f(y)\| \leq L \|x - y\|_2$$

ii) pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\nabla^2 f(x) \succeq cI_n$  (càd  $\langle \nabla^2 f(x)y, y \rangle \geq c \|y\|_2^2$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$ ).

Soit  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Alors, l'algorithme de descente de gradient  $(x_k)_k$  défini par  $x_0$  et  $x_{k+1} = x_k - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$  vérifie  $\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq [L/(2c)] \|x_k - x^*\|_2^2$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

*Démonstration.* On a  $\nabla f(x^*) = 0$ , alors d'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$\nabla f(x_k) = \nabla f(x_k) - \nabla f(x^*) = \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau.$$

On a donc

$$\begin{aligned} x_{k+1} - x^* &= x_k - x^* - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \nabla f(x_k) \\ &= x_k - x^* - (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \int_0^1 \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))(x_k - x^*) d\tau \\ &= (\nabla^2 f(x_k))^{-1} \int_0^1 [\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))](x_k - x^*) d\tau. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|x_{k+1} - x^*\|_2 \leq \|\nabla f(x_k)^{-1}\| \left\| \int_0^1 [\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))] d\tau \right\| \|x_k - x^*\|_2.$$

On conclut en observant que  $\|\nabla f(x_k)^{-1}\| = \|\nabla f(x_k)\|^{-1} \leq (1/c)$  et

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^1 [\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))] d\tau \right\| &\leq \int_0^1 \|\nabla^2 f(x_k) - \nabla^2 f(x^* + \tau(x_k - x^*))\| d\tau \\ &\leq \int_0^1 L(1 - \tau) \|x_k - x^*\|_2 d\tau = (L/2) \|x_k - x^*\|_2. \end{aligned}$$

■

Ainsi l'algorithme de Newton converge de manière quadratique quand  $\nabla f$  satisfait certaines conditions. C'est donc une convergence très rapide. La condition ii) est en particulier vérifiée pour les fonctions deux fois différentiables et **fortement convexes**, càd qui vérifient pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - (c/2)t(1-t) \|x - y\|_2^2$$

### 2.5.4 Directions de descente pour les problèmes sous contraintes

Dans les deux sous-sections précédentes, les directions de descente  $p$  étaient obtenues par minimisation d'un développement de Taylor du second ordre de la fonction convexe  $f$  à minimiser. Le choix de  $p$  n'était pas contraint et la minimisation de ce critère était le seul objectif.

Pour un problème d'optimisation sous contraintes, le choix de la direction de descente ne peut plus uniquement se faire dans le seul objectif de minimiser une approximation de  $f$  : au point courant  $x_k$ , on doit s'assurer que l'itération suivante  $x_{k+1} = x_k + p_k$  est dans l'ensemble des contraintes. On doit donc s'assurer que la direction de descente n'amène pas l'algorithme à produire des itérations qui sortent de l'ensemble de contrainte.

Soit le problème d'optimisation suivant

$$\boxed{\min_{x \in K} f(x)} \quad (2.6)$$

où  $K \subset \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction convexe deux fois différentiable.

L'algorithme de descente de gradient peut aussi être utilisé pour les problèmes d'optimisation sous contraintes à condition de s'assurer que les itérés de l'algorithme restent dans  $K$ .

Comme précédemment, au point courant  $x_k$  de l'algorithme, on fait une approximation de Taylor du second ordre de  $f$  :

$$f(x_k + p) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), p \rangle + \frac{1}{2} p^\top \nabla^2 f(x_k) p + o(\|p\|_2^2).$$

et on minimise cette approximation tout en s'assurant que  $x + p$  est bien dans l'ensemble de contraintes  $K$ . Ceci définit la direction de descente pour un problème d'optimisation sous contrainte.

**Définition 2.21.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexe deux fois différentiable et  $K \subset \mathbb{R}^n$  non vide. Soit  $x \in K$ , la **direction de descente (de Newton)** en  $x$  de  $f$  est une solution au problème d'optimisation

$$\min_{p \in \mathbb{R}^n} \left( \langle \nabla f(x), p \rangle + \frac{1}{2} p^\top \nabla^2 f(x) p : x + p \in K \right). \quad (2.7)$$

**Remarque 2.22.** Ici on s'assure que les itérations successives appartiennent bien à l'ensemble des contraintes  $K$  en cherchant les directions de descente  $p$  telles que  $x_k + p \in K$ . Une autre stratégie consiste à considérer la direction de descente comme dans les algorithmes de descentes de gradient, c'est-à-dire  $p_k = -\eta_k \nabla f(x_k)$  et ensuite à projeter  $x_k + p_k$  sur  $K$  :  $x_{k+1} = \text{proj}_K(x_k + p_k)$  où  $\text{proj}_K$  est un opérateur de projection sur  $K$  (par exemple,  $\text{proj}_K(y) \in \text{argmin}_{z \in K} \|y - z\|_2$ ). Ces procédures sont appelées **méthodes de descente de gradient projetée** ; elles sont très populaires en optimisation convexe.

## 2.6 Les méthodes de barrières

Les méthodes de barrières sont aussi connues sous le nom de méthodes de points intérieurs, au-delà du cadre des problèmes de programmation linéaire. Elles sont utilisées pour construire des solutions approchantes aux problèmes d'optimisation sous contraintes.

On considère ici les problèmes d'optimisation convexe différentiable (OCD) comme dans (P1) (c'est-à-dire les contraintes d'égalité sont affines et la fonction objectif ainsi que les contraintes d'inégalités sont convexes et  $\mathcal{C}^1$ ) : pour  $U$  un ouvert convexe de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\boxed{\min_{x \in K} f(x) \text{ où } K = \left\{ x \in U : \begin{array}{l} h_i(x) \leq 0, \forall i \in \mathcal{I} \\ Ax = b \end{array} \right\} \text{ et } \begin{array}{l} f, (h_i)_{i \in \mathcal{I}} \text{ sont convexes et } \mathcal{C}^1 \\ A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m. \end{array}} \quad (P1)$$

Les méthodes de barrières se proposent de trouver une solution approchante au problème (P1) en résolvant une suite de problèmes d'optimisation sans contraintes d'inégalité. Pour cela, on ajoute à la fonction objectif  $f(\cdot)$  une fonction de coût qui pénalise les points de  $K$  qui s'approche de la frontière de  $K$  (vu comme sous-ensemble de  $\{x \in U : Ax = b\}$ ). C'est ce coût additionnel qui crée une sorte de barrière interdisant aux algorithmes de sortir de  $K$ .

**Définition 2.23.** Une *fonction barrière pour (P1)* est une fonction continue  $\text{bar} : \overset{\circ}{K} \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $\overset{\circ}{K}$  est l'intérieur de  $K$  dans  $\{x \in U : Ax = b\}$ ) telle que  $\text{bar}(x) \rightarrow +\infty$  quand  $\max_{i \in \mathcal{I}} h_i(x) \rightarrow 0^-$ .

Les deux exemples classiques de fonctions barrières sont définies pour tout  $x \in U$  par

$$\text{bar}(x) = - \sum_{i \in \mathcal{I}} \log(-h_i(x)) \text{ et } \text{bar}(x) = - \sum_{i \in \mathcal{I}} \frac{1}{h_i(x)}.$$

L'objectif est de dissuader les algorithmes évoluant dans l'intérieur de  $K$  de trop s'approcher de la frontière de  $K$ . On introduit alors une famille de fonctions objectif indexée par un paramètre  $\mu > 0$  :

$$B(x, \mu) = f(x) + \mu \text{bar}(x)$$

où  $\text{bar}(\cdot)$  est une fonction barrière. Le problème d'optimisation associé est

$$\boxed{\min_{x \in U : Ax=b} B(x, \mu)} \quad (\text{PB}\mu)$$

On obtient ainsi une suite de problèmes d'optimisation ((PB $\mu$ )) indexée par un paramètre  $\mu > 0$ . L'idée maintenant est de résoudre ces problèmes et de faire tendre  $\mu$  vers 0 pour construire une solution approchante au problème d'origine (P1).

**Remarque 2.24.** Une manière naturelle de construire une barrière (non-continue) du bord de  $K$  dans  $\{x \in U : Ax = b\}$  est de prendre la fonction indicatrice de  $\{x \in U : h_i(x) \leq 0, i \in \mathcal{I}\}$ , c'est-à-dire, pour tout  $x \in U$ ,

$$\text{bar}(x) = \sum_{i \in \mathcal{I}} i_{\mathbb{R}_-}(h_i(x)) \text{ où } i_{\Omega}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \Omega \\ +\infty & \text{si } t \notin \Omega \end{cases}$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}$ . On peut voir les fonctions barrières de base  $t \in \mathbb{R}_-^* \rightarrow -\mu \log(-t)$  et  $t \in \mathbb{R}_-^* \rightarrow -\mu/t$  comme des fonctions continues convergeant simplement vers  $i_{\mathbb{R}_-}$  sur  $\mathbb{R}_-^*$  quand  $\mu \rightarrow 0^+$ .



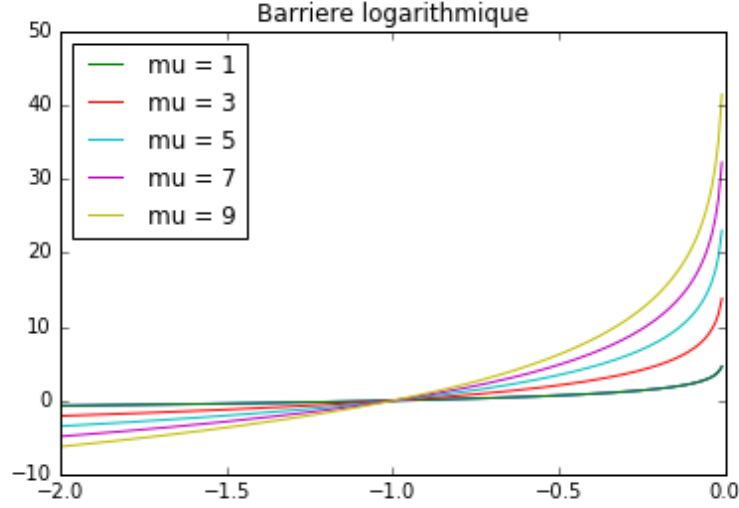


FIGURE 1 – Approximation de la barrière idéale  $i_{\mathbb{R}_-}$  par les barrières logarithmiques  $t \in \mathbb{R}_-^* \rightarrow -\mu \log(-t)$  quand  $\mu \rightarrow 0^+$ .

**Théorème 2.25.** (Convergence des méthodes de barrière) On suppose que  $f$  et  $(h_i)_{i \in \mathcal{I}}$  sont continues et que  $\text{bar}$  est une fonction barrière (continue) pour (P1). Pour tout  $\mu > 0$ , on suppose que (PB $\mu$ ) admet au moins une solution. On suppose aussi que  $K$  est sans point isolé.

Soit  $(\mu_k)_k$  une suite décroissante de réels strictement positifs et pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on note par  $x_k$  une solution de (PB $\mu$ ) pour  $\mu = \mu_k$ . Tout point d'adhérence de  $(x_k)_k$  est solution de (P1).

*Démonstration.* Soit  $\bar{x}$  un point d'adhérence de  $(x_k)_k$ . Pour ne pas charger les notations, on note encore par  $(x_k)_k$  la sous-suite convergeante vers  $\bar{x}$ .

Par continuité de  $x \rightarrow Ax$ , on a  $b = Ax_k \rightarrow A\bar{x}$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . En particulier,  $A\bar{x} = b$ . De même, par continuité de  $h_i$  pour  $i \in \mathcal{I}$ , on a  $h_i(\bar{x}) \leq 0$  pour tout  $i \in \mathcal{I}$ . On a donc  $\bar{x} \in K$ .

Si pour tout  $i \in \mathcal{I}$ ,  $h_i(\bar{x}) < 0$  alors  $\mu_k h_i(x_k) \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow +\infty$  et ceci pour tout  $i \in \mathcal{I}$ . Si  $\bar{x}$  est sur le bord de  $K$  alors par construction  $\text{bar}(x_k) \rightarrow +\infty$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Dans les deux cas, on a  $\liminf_k \mu_k \text{bar}(x_k) \geq 0$ . On en déduit que

$$\liminf_k (f(x_k) + \mu_k \text{bar}(x_k)) = f(\bar{x}) + \liminf_k \mu_k \text{bar}(x_k) \geq f(\bar{x}).$$

Par définition de l'optimalité de  $x_k$ , on a pour tout  $x$  tel que  $Ax = b$  et  $\text{bar}(x) < \infty$

$$f(x) + \mu_k \text{bar}(x) \geq f(x_k) + \mu_k \text{bar}(x_k)$$

et en passant à la limite inférieure pour  $k \rightarrow \infty$ , on a  $f(x) \geq f(\bar{x})$ . Ceci étant vrai pour tout  $x \in \overset{\circ}{K}$ , on en déduit, par continuité de  $f$  et comme  $K$  est sans point isolé, que pour tout  $x \in K$ ,  $f(x) \geq f(\hat{x})$ . Donc  $\hat{x}$  est bien solution au problème (P1). ■

Un algorithme de barrière consiste à résoudre une suite de problème (PB $\mu$ ) pour  $\mu = \mu_k$  où  $\mu_k \downarrow 0$  et à utiliser cette suite de solution comme une approximation de la solution du problème initial (P1).

Concrètement, on se fixe un nombre fini de problèmes du type  $(\text{PB}\mu)$  pour  $\mu = \mu_k$  où  $\mu_k \downarrow 0$  et  $k \in \{1, \dots, k_{max}\}$ . La dernière solution  $x_{k_{max}}$  est utilisée comme solution approchante de  $(\text{P1})$ .

On peut alors se demander pourquoi on ne résout pas seulement le dernier problème  $(\text{PB}\mu)$  pour  $\mu = \mu_{k_{max}}$ ? Cela est dû au fait que la Hessienne de  $B(\cdot, \mu)$  varie très rapidement en s'approchant du bord de  $K$ . La méthode de Newton est donc très instable : un choix légèrement différent du point initial dans la méthode de Newton produira de grands changements dans la suite des itérations de l'algorithme. On va alors résoudre une suite de problèmes  $(\text{PB}\mu)$  en décroissant le paramètre  $\mu$  à chaque itération et utiliser la solution du dernier problème comme point initial du problème suivant.

Les solutions  $x^*(\mu)$  de  $(\text{PB}\mu)$  joue un rôle central pour les méthodes de barrière. L'ensemble de ces points décrit un "chemin" dans l'intérieur des contraintes.

**Définition 2.26.** *On suppose que pour tout  $\mu > 0$ , le problème  $(\text{PB}\mu)$  admet une unique solution notée  $x^*(\mu)$ . L'ensemble  $\{x^*(\mu) : \mu > 0\}$  est appelé **central path**.*

### 3 Un algorithme de barrière primal en programmation linéaire

On se place maintenant dans le cadre des problèmes de programmation linéaire. On considère alors le problème sous forme standard

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \langle c, x \rangle \text{ tel que } Ax = b, x \geq 0 \quad (\text{PPL})$$

où  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . On suppose que  $A$  est de rang  $m$ .

On utilise une méthode de barrière logarithmique associée à  $(\text{PPL})$  : pour tout  $\mu > 0$ , on introduit la fonction objectif : pour tout  $x \in U$ ,

$$B(x, \mu) = \langle x, c \rangle - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i)$$

où  $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\}$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et on considère le problème d'optimisation

$$\min_{x \in U} B(x, \mu) \text{ tel que } Ax = b. \quad (\text{PPL}\mu)$$

La fonction barrière nous a donc permis de retirer la contrainte  $x \geq 0$ .

On souhaite maintenant résoudre le sous-problème de barrière  $(\text{PPL}\mu)$ . On va utiliser la méthode de Newton pour les problèmes sous contraintes. En tout point  $x \in U$ , on fait un développement de second ordre de la fonction objectif  $B(\cdot, \mu)$  :

$$B(x + p, \mu) = B(x, \mu) + \langle \nabla_x B(x, \mu), p \rangle + \frac{1}{2} p^\top \nabla_{x,x}^2 B(x, \mu) p + o(\|p\|_2^2)$$

où on calcule le gradient et la Hessienne de  $x \rightarrow B(x, \mu)$  en  $x \in U$  :

$$\nabla_x B(x, \mu) = c - \mu X^{-1} e := g_x \text{ et } \nabla_{x,x}^2 B(x, \mu) = \mu X^{-2} := H_x \quad (3.1)$$

et pour tout  $x \in U$ ,  $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  et  $e = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ .

Les directions de descente en  $x$  pour la méthode de Newton sont donc solution du problème d'optimisation :

$$\min_{p+x>0} \left( \langle g_x, p \rangle + \frac{1}{2} p^\top H_x p : A(x + p) = b \right). \quad (3.2)$$

On ne cherchera les directions de descente que pour des points  $x$  qui sont dans l'ensemble de contraintes. On aura alors  $Ax = b$  et on cherchera alors les directions  $p$  pour lesquelles  $Ap = 0$ . On souhaite alors résoudre le problème d'optimisation en OCD :

$$\min_{p+x>0} \left( \langle g_x, p \rangle + \frac{1}{2} p^\top H_x p : Ap = 0 \right) \quad (3.3)$$

pour lequel la condition de Slater sont vérifiées (car  $\ker(A) \neq \emptyset$ ), et donc par les conditions KKT :  $p_x^*$  est solution de (3.3) si et seulement si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  tel que

1.  $Ap_x^* = 0, p_x^* + x > 0$
2.  $\nabla_p L(p_x^*, \lambda) = 0$  càd  $g_x + H_x p_x^* + A^\top \lambda = 0$  càd  $p_x^* = H_x^{-1}[-g_x - A^\top \lambda] = x + \frac{X^2}{\mu}[-A^\top \lambda - c]$ .

De plus,  $A$  est de rang  $m$  et  $X$  est définie positive car  $x > 0$  donc  $AX^2A^\top$  est une matrice inversible.

**Lemme 3.1.** *Si  $A$  est de rang  $m$  alors  $AX^2A^\top$  est une matrice inversible.*

*Démonstration.* On rappelle que  $\text{Ker}(A^\top) = (\text{Im}(A))^\perp$  car  $x \in \text{Ker}(A^\top)$  ssi  $A^\top x = 0$  ssi  $\langle A^\top x, y \rangle = 0$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  ssi  $\langle x, Ay \rangle$  pour tout  $y \in \mathbb{R}^n$  ssi  $x \in (\text{Im}(A))^\perp$ . Comme ici  $A$  est de rang plein  $m$  on a  $(\text{Im}(A))^\perp = \{0\}$  et donc  $\text{Ker}(A^\top) = \{0\}$ .

De plus pour tout  $x \in \mathbb{R}^m$ , on a

$$\langle AX^2A^\top x, x \rangle = \langle XA^\top x, A^\top x \rangle = \sum_{i=1}^n x_j^2 (A^\top x)_j^2.$$

Donc, si  $\langle AX^2A^\top x, x \rangle = 0$  alors  $A^\top x = 0$  et comme  $\text{Ker}(A^\top) = \{0\}$  on a  $x = 0$ . Par ailleurs,  $AX^2A^\top$  est symétrique donc 0 n'est pas valeur singulière de  $AX^2A^\top$  donc  $AX^2A^\top$  est inversible. ■

L'équation suivante (obtenue en multipliant la deuxième équation KKT par  $\mu A$ ), en  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,

$$AX^2A^\top \lambda = A[\mu x - X^2 c] \quad (3.4)$$

admet une unique solution, notée  $\lambda^*$ . Pour cette solution  $p_x^* = x + \mu^{-1} X^2[-A^\top \lambda^* - c]$  est une direction de descente solution du problème (3.2) si  $p_x^* + x > 0$ .

On en déduit l'algorithme de Newton suivant.

**input** :  $x_0 \in (\mathbb{R}_+)^n$  tel que  $Ax_0 = b$ ;  $\mu_0$  et  $0 < \rho < 1$ .

**output**: une solution approchante au problème (PPL)

1 **while** critère d'arrêt et  $x_k > 0$  **do**

2      $\mu_k = \rho \mu_k$

3      $X_k = \text{diag}(x_k)$

4     Résoudre le système :  $\lambda_k \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$AX_k^2 A^\top \lambda_k = A[\mu_k x_k - X_k^2 c]$$

5     Calculer la direction de descente :  $p_k = x_k + \mu_k^{-1} X_k^2[-A^\top \lambda_k - c]$

5      $x_{k+1} = x_k + p_k$

6 **end**

**Algorithm 4:** Algorithme de point intérieur 1 : algorithme de Newton primal sur les sous-problèmes de barrière.

**Remarque 3.2.** On peut aussi inclure un step size dans l'étape 5 de l'Algorithme 4. On fait alors la mise à jour  $x_k = x_k + \alpha_k p_k$  où  $\alpha_k$  minimise  $\alpha \rightarrow B(x_k + \alpha p_k, \mu_k)$ .

On peut trouver un résultat sur la convergence de l'Algorithme 4 dans [1].

## 4 Un algorithme de barrière primal-dual en PL

L'algorithme présenté dans la section précédente est une séquence d'algorithme de descente pour des directions de descentes obtenues par une approximation de second ordre de  $B(\cdot, \mu_k)$ , la fonction objectif du problème de barrière pour le paramètre  $\mu_k$ . La direction de descente est donc obtenue uniquement à partir du problème primal auquel a été ajouté une barrière.

Dans ce chapitre, nous utilisons la même méthode de barrière que précédemment et une étape de descente pour résoudre les sous-problèmes de barrière associés mais les directions de descentes sont obtenues en tenant compte du problème dual. Cette méthode est celle implémentée dans la méthode `conelp` de CVXOPT.

On rappelle maintenant les problèmes primal et dual :

$$\text{Primal : } \min_x \langle c, x \rangle \text{ tel que } Ax = b, x \geq 0 \quad (\text{PPL})$$

$$\text{Dual : } \max_{s, \lambda} \langle b, \lambda \rangle \text{ tel que } A^\top \lambda + s = c, s \geq 0 \quad (\text{DPL})$$

où  $c \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . On suppose que  $A$  est de rang  $m$ .

D'après le Théorème 2.19,  $x^*$  est solution du problème primal (PPL) et  $(s^*, \lambda^*)$  est solution du problème dual (DPL) si et seulement si les conditions KKT sont satisfaites :

$$\begin{aligned} Ax^* &= b, x^* \geq 0, s^* \geq 0 \\ s_i^* x_i^* &= 0, \forall i = 1, \dots, n \\ A^\top \lambda^* + s^* &= c. \end{aligned}$$

On peut mettre une barrière logarithmique dans le problème primal (PPL) comme dans la section précédente, (optionnellement) calculer le problème dual associé, et les conditions KKT. On obtient alors :

$$\text{Primal : } \min_{x \in U} \left( \langle c, x \rangle - \mu \sum_{i=1}^n \log x_i \text{ tel que } Ax = b \right) \quad (\text{PPL}\mu)$$

$$\text{Dual : } \max_{\lambda} \left( \langle b, \lambda \rangle - n\mu \log \left( \frac{e}{\mu} \right) + \mu \sum_{i=1}^n \log (h_i - \langle \lambda, A_{\cdot i} \rangle) \right) \quad (\text{DPL}\mu)$$

où  $A_{\cdot i}$  est la  $i$ -ième colonne de  $A$ .

**Remarque 4.1.** On peut aussi définir les fonctions  $B(\cdot, \mu)$  sur tout l'espace  $\mathbb{R}^n$  à condition d'autoriser la valeur  $+\infty$  due à l'extension de la définition de  $t \rightarrow \log t$  à tout  $\mathbb{R}$ . Le formalisme de la dualité Lagrangienne et des conditions KKT s'applique encore dans ce cadre si on restreint l'étude à leur domaine, c'est-à-dire à l'ensemble des points où la fonction est finie. On renvoie le lecteur intéressé au livre [5] pour une exposition de ces résultats.

La fonction de Lagrange associée au problème (PPL $\mu$ ) est

$$L_\mu(x, \lambda) = B(x, \mu) + \langle \lambda, b - Ax \rangle = \langle x, c \rangle - \mu \sum_{i=1}^n \log(x_i) + \langle \lambda, b - Ax \rangle \quad (4.1)$$

où  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte " $Ax = b$ ". On a pour tout  $x \in U$  et  $\lambda \in \mathbb{R}^m$ ,

$$\nabla_x L_\mu(x, \lambda) = c - A^\top \lambda - \mu X^{-1} e$$

où pour tout  $x \in U$ ,  $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$  et  $e = (1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ . En écrivant les conditions KKT, on a d'après le Théorème 2.17 (étendu au cas des fonctions convexes prenant la valeur  $+\infty$  quand  $B(\cdot, \mu)$  est défini sur tout  $\mathbb{R}^n$  plutôt que sur  $U$  en étendant la définition du  $\log(\cdot)$  sur  $\mathbb{R}_-$ ) que  $x_\mu^*$  est solution de (PPL $\mu$ ) si et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$\begin{aligned} Ax_\mu^* &= b \\ 0 &= \nabla_x L_\mu(x_\mu^*, \lambda) \text{ c\`ad } A^\top \lambda + \mu(X_\mu^*)^{-1} e = c \text{ et } x_\mu^* > 0 \end{aligned}$$

où  $X_\mu^* = \text{diag}((x_\mu^*)_1, \dots, (x_\mu^*)_n)$ . En posant  $s = \mu(X_\mu^*)^{-1} e$ , on peut réécrire les conditions KKT précédentes comme :

$$\begin{aligned} Ax_\mu^* &= b, x_\mu^* > 0 \\ A^\top \lambda + s &= c \\ X_\mu^* s &= \mu e. \end{aligned} \tag{4.2}$$

On peut mettre ces conditions en parallèle avec les conditions KKT du problème initial (PPL) (cf. Section 2.4) : il existe  $s, \lambda$  tels que

$$\begin{aligned} Ax^* &= b, x^* \geq 0, s \geq 0 \\ A^\top \lambda + s &= c \\ X^* s &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

qui sont identiques aux précédentes quand  $\mu \downarrow 0$  sauf que la condition " $x \geq 0$ " remplace " $x > 0$ " (solution intérieure). On remarque que la complementary slackness condition (4.3) est la seule condition KKT impactée par l'introduction du paramètre  $\mu$  dans les problèmes de barrière annexes (PPL $\mu$ ).

L'écriture des conditions KKT permet aussi de voir que quand  $\mu \downarrow 0$ , une solution de (PPL $\mu$ ) converge vers une solution de (PPL) et que les solutions de (PPL $\mu$ ) pour  $\mu > 0$  se situent bien à l'intérieur de l'ensemble des contraintes contrairement aux solutions de (PPL) qui vérifient la complementary slackness condition (4.3) pour lesquelles soit le multiplicateur de Lagrange est nul soit la contrainte est active.

L'originalité de l'approche primal-dual est de regarder les conditions d'égalité de KKT comme un problème de recherche de zéro d'une fonction. On pose

$$F_\mu(x, \lambda, s) = \begin{pmatrix} A^\top \lambda + s - c \\ Ax - b \\ Xs - \mu e \end{pmatrix}$$

On voit donc que  $(x^*, \lambda^*)$  vérifie les conditions KKT si  $x^* > 0$  et  $F_\mu(x^*, \lambda^*, s^*) = 0$  pour un certain  $s^*$ .

Une idée est alors de résoudre l'équation  $F(x^*, \lambda^*, s^*) = 0$ . Pour cela, on utilise l'algorithme de Newton (cf. Section 2.5.1) ; On calcul les directions de descente  $p$  en un point  $(x, \lambda, s)$  solutionnant l'équation

$$F_\mu(x, \lambda, s) + JF_\mu(x, \lambda, s)p = 0 \tag{4.4}$$

où  $JF_\mu(x, \lambda, s)$  est la Jacobienne de  $F_\mu$  en  $(x, \lambda, s)$  :

$$JF_\mu(x, \lambda, s) = \begin{pmatrix} 0 & A^\top & I_n \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{pmatrix}$$

où  $S = \text{diag}(s) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Une fois les directions de descente calculées – en résolvant le système d'équations linéaires (4.4) – on peut faire une descente de Newton au point courant. Comme précédemment, on fait décroître le paramètre  $\mu$  vers 0 à chaque itération. On obtient ainsi le deuxième algorithme de point intérieur qui, contrairement au premier, utilise les variables du problème dual pour calculer les directions de descente. En particulier, on ne fait pas d'approximation de Taylor sur  $B(\cdot, \mu)$  mais sur  $F_\mu$  qui ne contient qu'un seul terme non linéaire " $Xs$ ".

<p><b>input</b> : <math>x_0 \in (\mathbb{R}_+)^n</math> tel que <math>Ax_0 = b</math>; <math>\lambda_0 \in \mathbb{R}^m</math>, <math>s_0 \in (\mathbb{R}_+)^n</math>; <math>\mu_0</math> et <math>0 &lt; \rho &lt; 1</math>.</p> <p><b>output</b>: une solution approchante au problème (PPL)</p> <p>1 <b>while</b> critère d'arrêt <b>do</b></p> <p>2     <math>\mu_k = \rho\mu_k</math></p> <p>3     Calculer une direction de descente : <math>p_k \in \mathbb{R}^{n+m+n}</math> tel que</p> $F_{\mu_k}(x_k, \lambda_k, s_k) + JF_{\mu_k}(x_k, \lambda_k, s_k)p_k = 0$ <p>4     On effectue une étape de descente :</p> $\begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \\ s_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_k \\ \lambda_k \\ s_k \end{pmatrix} + p_k$ <p>5 <b>end</b></p> <p>6 <b>return</b> <math>x_k</math></p>
---

**Algorithm 5:** Algorithme de point intérieur 2 : algorithme de Newton primal-dual sur les sous-problèmes de barrière.

L'algorithme primal de point intérieur a une complexité algorithmique en  $\mathcal{O}(n^{7/2})$  (cf. [1]) qui est bien polynomial (contrairement à la complexité exponentielle (en  $m$ ) de l'algorithme du simplexe) mais qui reste cependant très grand quand  $n$  est grand. L'algorithme de point intérieur primal-dual est lui en  $\mathcal{O}(\sqrt{m+n} \log(1/\epsilon))$  pour une précision en  $\epsilon$  (cf. [4]).

**Remarque 4.2.** On voit apparaître un certain compromis entre la méthode du simplexe pour laquelle chaque itération est très rapide mais qui peu nécessiter un grand nombre d'itérations. Alors que les méthodes de points intérieurs peuvent avoir des itérations coûteuses : le calcul des directions de descente ; mais nécessite qu'un petit nombre d'itérations.

## 5 Critères d'arrêt

Les méthodes de points intérieur peuvent tourner indéfiniment car elle ne peuvent jamais être égales à la solution exacte au problème (PPL) étant donné que la suite des itérées reste toujours à l'intérieur grâce à l'effet de barrière. Il faut donc choisir un critère de sortie de la boucle. Il y a plusieurs choix possibles.

On peut par exemple, utiliser la distance entre deux itérés successifs :  $\|x_{k+1} - x_k\|_2$ . Mais dans les deux algorithmes présentés, on utilise de la dualité Lagrangienne et les conditions KKT qui peuvent fournir des critères d'arrêt.

Pour le premier algorithme de Newton primal, on peut utiliser les conditions d'optimalité KKT du problème de barrière (PPL $\mu$ ) :  $x_\mu^*$  est solution de (PPL $\mu$ ) si et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  tel que

$$\begin{aligned} Ax_\mu^* &= b \\ X_\mu^*(A^\top \lambda - c) + \mu e &= 0 \end{aligned}$$

où  $X_\mu^* = \text{diag}((x_\mu^*)_1, \dots, (x_\mu^*)_n)$ .

On peut alors utiliser le vecteur de résidus

$$r_k = X_k(A^\top \lambda_k - c) + \mu_k e$$

comme base d'un critère d'arrêt : l'algorithme s'arrête quand  $\|r_k\|_2$  passe sous un certain seuil donné a priori – et quand  $\mu_k$  est assez proche de zéro.

Pour le deuxième algorithme primal-dual, on utilise un critère d'arrêt très classique : le duality gap. On sait qu'une solution est optimale pour le primal et le dual en un point d'annulation du duality gap. Pour le problème initial (PPL) le duality gap est

$$\langle c, x \rangle - \langle b, \lambda \rangle.$$

Cette quantité est toujours positive pour des points  $x$  et  $\lambda$  dans leurs ensemble de contraintes et elle est nulle si et seulement si  $x$  est solution du primal et  $\lambda$  est solution du dual.

Une idée naturelle est alors d'arrêter l'algorithme quand le duality gap est proche de zéro. Dans le cadre du deuxième algorithme, on calcul par descente successive une approximation du zéro de la fonction  $F_\mu$  qui caractérise les conditions KKT du problème de barrière. A l'optimal, on a

$$\langle s, x \rangle = \langle c - A^\top \lambda, x \rangle = \langle c, x \rangle - \langle \lambda, Ax \rangle = \langle c, x \rangle - \langle b, \lambda \rangle$$

de plus  $\langle x, s \rangle = n\mu$ . Donc  $n\mu$  est égal au duality gap à l'optimum. Un critère d'arrêt est donc donner par  $n\mu$  petit et  $\langle s, x \rangle - n\mu$  petit.

## Références

- [1] Philip E. Gill, Walter Murray, Michael A. Saunders, J. A. Tomlin, and Margaret H. Wright. On projected Newton barrier methods for linear programming and an equivalence to Karmarkar's projective method. *Math. Programming*, 36(2) :183–209, 1986.
- [2] L. G. Hačijan. A polynomial algorithm in linear programming. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 244(5) :1093–1096, 1979.
- [3] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4) :373–395, 1984.
- [4] James Renegar. A polynomial-time algorithm, based on Newton's method, for linear programming. *Math. Programming*, 40(1, (Ser. A)) :59–93, 1988.
- [5] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [6] Daniel Spielman and Shang-Hua Teng. Smoothed analysis of algorithms : why the simplex algorithm usually takes polynomial time. In *Proceedings of the Thirty-Third Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pages 296–305 (electronic). ACM, New York, 2001.