Rattrapage cours d'optimisation différentiable

Durée : 2 heures
Les documents ainsi que les calculatrices ne sont pas autorisés.

****

Exercice 0.1 (Descente de gradient)
On considère la fonction

$$\varphi(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

On remarque que $\varphi(x^*) = 0$ si et seulement si $x^* = 0$. Décrire la convergence de l'algorithme de Newton pour résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ en fonction de la valeur du point initial.

****

****

Exercice 0.2 (Système d'équations linéaire et optimisation)
Soit A une matrice symétrique définie positive de $\mathbb{R}^{N\times N}$ et $y \in \mathbb{R}^N$.

1. **Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :**
   (a) **$\hat{x}$ est solution de $Ax = y$**
   (b) **$\hat{x}$ minimise la fonction $x \to F(x) = \frac{1}{2}x^\top Ax - x^\top y$.**
2. **En utilisant *1.*, proposer un algorithme itératif pour approcher une solution du système $Ax = y$ ne faisant pas intervenir l'inverse de A ou la résolution d'un système d'équations linéaires.**

****

****

Exercice 0.3
On définit

$$\Lambda = \left\{\theta = (\theta_j)_{j=1}^d \in \mathbb{R}^d : \theta_j \geq 0, \forall j = 1, \ldots, d\right\}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Calculer la valeur

$$(\star) = \inf_{\theta\in\Lambda} \frac{1}{2}\sum_{j=1}^d \left(\theta_j x_j^2 + \frac{1}{\theta_j}\right).$$

****

****

Exercice 0.4 (KKT en optimisation différentiable)

Trouver une solution au problème

$$\max\left(xy : x + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\right) \tag{1}$$

****