Rattrapage cours d'optimisation différentiable

Durée : 2 heures
Les documents ainsi que les calculatrices ne sont pas autorisés.

****

Exercice 0.1
Calculer le gradient et la Hessienne des fonctions suivantes. En déduire les points critiques des fonctions suivantes et déterminer leur nature selon la condition du second ordre (minimum ou maximum local ou indéterminé) pour

1) $f : (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to x^2 - \sqrt{y}$

2) $g : (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \sqrt{xy}$

3) $h : (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to x^2 + y^2$

****

Correction de l'exercice 0.1 On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -1/(2y^{1/2}) \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/(4y^{3/2}) \end{pmatrix}$$

Donc f n'a pas de point critique sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\nabla g(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{y/x} \\ \sqrt{x/y} \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 g(x,y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{y}}{2x^{3/2}} & \frac{1}{2\sqrt{xy}} \\ \frac{1}{2\sqrt{xy}} & \frac{-\sqrt{x}}{2y^{3/2}} \end{pmatrix}$$

Donc g n'a pas de point critique.

On a pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$,

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \text{ et } \nabla^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Donc h a un point critique en $(0,0)$ et c'est un minimum local.

****

Exercice 0.2
On souhaite minimiser la fonction

$$f(x,y) = -2x + y$$

sur l'ensemble de contrainte

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 2, 2x + 3y \geq 6\}.$$

1. **Faite une représentation géométrique de K et de quelques lignes de niveau de f. Déduire de cette représentation une solution au problème.**
2. **Prouver le résultat théoriquement.**

****

Correction de l'exercice 0.2

— En dessinant la contrainte K et des lignes de niveaux de f, on voit que $(2, 2/3)$ est l'unique solution au problème.

— Les contraintes sont affines et la fonction objective est affine donc la contrainte est qualifiée et c'est un problème de type OCD. Le théorème de KKT dit que (x, y) est solution du problème si et seulemnent si il existe λ et μ (solution du problème dual) tels que

  — $\nabla_{(x,y)} L(x, y, \lambda, \mu) = 0$

  — $\lambda, \mu \geq 0$

  — $\lambda(x - 2) = 0$ et $\mu(6 - 2x - 3y) = 0$.

  Le premier point est équivalent à résoudre le système

$$\begin{cases} -2 - 2\lambda + \mu = 0 \\ 1 - 3\lambda = 0 \end{cases}$$

  Alors $\lambda = 1/3$ et $\mu = 8/3$. En particulier, $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$. Donc, d'après la "complementary condition", on a $x = 2$ et $2x + 3y = 6$. Donc $(2, 2/3)$ est l'unique solution au problème.

****

Exercice 0.3
Trouver une solution au problème

$$\min \left(x^2 - y : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right) \tag{1}$$

où

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y + 2 \geq 0, x + 2y - 10 \leq 0, y \geq 0 \right\}.$$

(On pourra représenter la contrainte K et quelques lignes de niveaux de la fonction objectif pour guider la discussion sur les différentes possibilités issues des "complementary condition" de KKT).

****

Correction de l'exercice 0.3 Comme la contrainte K est compact (car c'est un ensemble fermé et borné) et que la fonction objectif $f : (x, y) \to x^2 - y$ est continue, (1) admet au moins une solution. Dans la contrainte K, il n'y a que des contraintes linéaires. La contrainte est donc qualifiée. De plus, la fonction objectif est convexe (on le vérifie par exemple en calculant sa Hessienne) et les contraintes aussi. On peut alors appliquer le théorème de KKT dans le cas OCD (sur tout K) : $(x, y) \in K$ est solution de (1) si et seulement s'il existe $\lambda_k, k = 1, 2, 3$ tels que :

KKT1 $\nabla_{(x,y)} L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ où L est la fonction de Lagrange du problème

KKT2 $\lambda_k \geq 0, k = 1, 2, 3,$

KKT3 $\lambda_k h_k(x, y) = 0, k = 1, 2, 3$ où les $(h_k)_{k=1}^3$ sont les 3 contraintes de K.

Plus précisément, on a pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(\lambda_k)_{k=1}^3 \in \mathbb{R}^3$,

$$L(x, y, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = x^2 - y + \sum_{k=1}^{3} \lambda_k h_k(x, y)$$

$$h_1(x, y) = y - x - 2, h_2(x, y) = x + 2y - 10, h_3(x, y) = -y$$

Ce sont les 3 conditions d'exclusion (voir KKT3) qui mènent ensuite les différentes hypothèses à faire. Cependant, en représentant la contrainte K et quelques lignes de niveau de f, on voit que la troisième contrainte "$y = 0$" ne devrait pas être active. Ainsi, en commençant par supposer que $\lambda_3 > 0$, on devrait aboutir à une contradiction.

On commence par écrire les conditions satisfaites par $x, y, \lambda_1, \lambda_2$ et λ_3 :

$$2x - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad \text{(KKT1)}$$
$$-1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \qquad \text{(KKT1)}$$
$$y - x - 2 \leq 0, x + 2y - 10 \leq 0, -y \leq 0 \qquad ((x, y) \in K)$$
$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0 \qquad \text{(KKT2)}$$
$$\lambda_1(y - x - 2) = 0, \lambda_2(x + 2y - 10) = 0, \lambda_3 y = 0 \qquad \text{(KKT3)}$$

On commence donc par supposer que $\underline{\lambda_3 > 0}$. On a donc $y = 0$ et d'après (KKT3), $[\lambda_1 = 0$ ou $x = -2]$ et $[\lambda_2 = 0$ ou $x = 10]$. Si $\lambda_1 > 0$ alors $x = -2$ et donc $\lambda_2 = 0$. Or d'après (KKT1), on aura $-4 = 2x = \lambda_1 > 0$, on a donc une contradiction donc $\lambda_1 = 0$ alors d'après (KKT1), $2x = -\lambda_2$ or $\lambda_2 = 0$ ou $x = 10$ donc soit $\lambda_2 = 0 = x$, soit $x = 10$ et $\lambda_2 = -20$ mais d'après (KKT2), $\lambda_2 \geq 0$ donc $\lambda_2 = 0 = x$. Mais d'après (KKT1), on a $\lambda_3 = -1$, ce qui est une contradiction. On en déduit que forcément $\lambda_3 = 0$.

Comme $\lambda_3 = 0$, on a d'après (KKT1) que $2x - \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ et $-1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0$ et donc

$$\lambda_1 = \frac{1 + 4x}{3} \text{ et } \lambda_2 = \frac{1 - 2x}{3}. \tag{2}$$

D'après (KKT3), on a $[x = 1/2$ ou $x + 2y - 10 = 0]$ et $[x = -1/4$ ou $y - x - 2 = 0]$. On a alors $[x = 1/2$ et $y = 2 + x = 5/2]$ ou $[x = -1/4$ et $y = (10 - x)/2 = (10 + 1/4)/2 = 41/8]$ ou $[x = 2$ et $y = 4]$. Mais $x = 2$ implique dans (2) que $\lambda_2 < 0$ ce qui n'est pas possible d'après (KKT2). Donc $[x = 2$ et $y = 4]$ n'est pas possible. De plus, $(-1/4, 41/8)$ n'est pas dans K car $y - x - 2 = 41/8 + 1/4 - 2 = 27/8 > 0$. Il n'y a donc qu'une seule solution qui est $(1/2, 5/2)$.