

Sur la propriété d'isométrie restreinte des matrices de Fourier aléatoires

Guillaume Lecué*

Résumé

Le compressed sensing est un problème de traitement de données où les étapes d'acquisition et de compression se font en même temps. Un tel procédé permet de grands gains de performances en terme de stockage ainsi que de coût/vitesse d'acquisition si la donnée stockée/observée permet la reconstruction du signal d'origine. Nous verrons que cette reconstruction peut se faire de manière efficace pour certains types de signaux qui ont une représentation parcimonieuse dans une base choisie.

On exposera ce problème pour le cas de la reconstruction de signaux parcimonieux à partir de l'observation d'un petit nombre de leurs coefficients de Fourier. On exposera les connections entre le problème du Compressed Sensing et certaines propriétés de matrices aléatoires et les sections euclidiennes de la boule unité de ℓ_1 par des espaces de caractères.

Finalement, on rappellera les principales idées de la preuve de Rudelson&Vershynin [38] de la propriété d'isométrie restreinte des matrices de Fourier extraites aléatoires en soulignant les potentielles sources de pertes logarithmiques dans l'argument.

1 Le problème du Compressed Sensing pour des mesures de Fourier

Etant donné un signal $x \in \mathbb{C}^N$ et un ensemble $I \subset \{1, \dots, N\}$ de fréquences, il est en général impossible de reconstruire x uniquement à partir de ses coefficients de Fourier ($\widehat{x}_i : i \in I$) à moins que $I = \{1, \dots, N\}$ (car la transformée de Fourier est une bijection sur \mathbb{C}^N) ou x a des propriétés particulières.

C'est le paradigme du Compressed Sensing : reconstruire un certain type de signaux à partir d'une information incomplète sur ces signaux (ici un petit nombre de coefficients de Fourier).

D'autres mesures linéaires d'un signal x peuvent être considérées. Mais, dans cet exposé, on s'intéressera principalement à la reconstruction de signaux à partir d'un petit nombre de coefficients de Fourier. Principalement, parce que ce type de mesures "structurées" sont les plus utilisées en pratique et aussi parce qu'il reste encore des questions ouvertes sur leurs propriétés théoriques.

Pour fixer les notations, on introduit la matrice de Fourier (transformée de Fourier discrète) :

$$\Gamma : \begin{cases} \mathbb{C}^N & \rightarrow & \mathbb{C}^N \\ x & \rightarrow & \Gamma x = \widehat{x} \end{cases} \quad \text{où } \Gamma = \left(\frac{w^{(p-1)(q-1)}}{\sqrt{N}} \right)_{1 \leq p, q \leq N} \quad \text{et } w = \exp(-2i\pi/N). \quad (1.1)$$

On note par $\bar{\Gamma}_1, \dots, \bar{\Gamma}_N$ les vecteurs lignes de Γ . On a donc $\widehat{x}_i = \langle \bar{\Gamma}_i, x \rangle$ pour tout $i = 1, \dots, N$.

*CREST, ENSAE, 5 avenue Henry Le Chatelier 91120 Palaiseau. Email : guillaume.lecue@ensae.fr

Pour un sous-ensemble $I \subset \{1, \dots, N\}$ de fréquences, on dispose des données $(\hat{x}_i : i \in I)$. En terme matriciel, on dispose de la donnée $\Gamma_I x$ où

$$\Gamma_I : \begin{cases} \mathbb{C}^N & \rightarrow & \mathbb{C}^I \\ x & \rightarrow & (\hat{x}_i : i \in I). \end{cases}$$

Cette matrice est appelée *matrice de mesures* en Compressed sensing. Il existe une multitude de matrices de mesures mais nous nous bornerons à l'étude des matrices de Fourier extraites Γ_I (c'est-à-dire aux sous matrices de Γ obtenues en ne gardant que les lignes d'indices dans I).

Lors de la prise de données (imaginons pas exemple une prise de photo), on ne va donc acquérir et stocker que l'information $\Gamma_I x$. L'approche habituelle se fait généralement en deux étapes 1) acquisition de données brutes 2) compression de ses données. Ici, en Compressed sensing, au lieu de stocker sur une carte mémoire le signal au format RAW qui nécessite l'enregistrement de N pixels et ensuite utiliser un logiciel de compression pour stocker un plus petit nombre de données, on va directement acquérir un petit nombre de mesures du signal. En d'autres termes, l'acquisition et la compression se font en même temps lors de la prise de vue. Bien sûr, un tel procédé n'a d'intérêt que si on peut reconstruire tous les signaux x qu'on est amenés à rencontrer à partir de la donnée $\Gamma_I x$.

Une telle reconstruction ne peut être efficace pour tous les signaux et nécessite donc que les signaux d'origines satisfassent certaines propriétés. En compressed sensing, on s'intéresse surtout à des propriété de parcimonie (ou approximativement parcimonieuses). C'est-à-dire, on suppose que le signal d'origine peut être décrit avec seulement quelques coordonnées dans une base précédemment choisie (c'est-à-dire les signaux rencontrés ont un petit support dans une certaine base).

Le problème mathématique s'énonce donc de la manière suivante : sachant qu'on observe $m = |I|$ coefficients de Fourier d'un signal x de grande dimension N mais de petit support de taille s dans la base canonique, quelles sont les conditions sur les trois paramètres s , m et N et quel sont les ensembles I de fréquences à transmettre de telle sorte qu'il soit possible de reconstruire exactement tout signal s -sparse x seulement à partir de ces m coefficients de Fourier $\Gamma_I x$?

Dans cet exposé, on montrera qu'une sélection aléatoire des fréquences à transmettre permet de prendre m (le nombre de mesures) de l'ordre de s (la taille des supports des signaux) à des termes logarithmiques près. On rappellera les connections entre ce problème et d'autres problèmes concernant les matrices aléatoires, les sections presque euclidiennes de la boule unité associée à la norme ℓ_1 , le "principe d'incertitude discret". On rappellera brièvement la preuve de Rudelson&Vershynin [38] montrant qu'avec grande probabilité, il suffit de $m \sim s \log^4 N$ mesures pour reconstruire tout vecteur s -sparse. Il est conjecturé que seulement $m \sim s \log N$ mesures sont nécessaires. On précisera quelles sont les sources potentielles des pertes logarithmiques dans l'argument de [38].

Remarque 1.1 *Toutes matrices Γ telles que 1) Γ est une isométrie 2) les entrées de Γ sont telles que $|\Gamma_{pq}| \leq C/\sqrt{N}$ (où C est une constante absolue), devraient fournir les mêmes résultats théoriques que la matrice de Fourier discrète. Notamment les matrices de Walsh.*

Remarque 1.2 *Le problème du Compressed Sensing peut-être vu comme un problème de résolution d'un système hautement indéterminé de $m = |I|$ équations à N inconnues dont on sait que seulement s d'entres elles sont non-nulles. C'est cette information supplémentaire qui permet de résoudre ce problème à première vue impossible.*

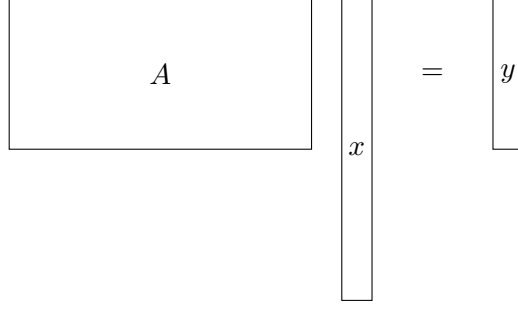


FIGURE 1 – Trouver x à partir de $y = Ax$: le Compressed Sensing est un problème de résolution d’un système hautement sous-déterminé.

Remarque 1.3 (Notation) On utilise les notations suivantes : pour tous $x, y \in \mathbb{C}^N$ et $p \geq 1$,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{1/p} \text{ et } \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^N x_i \bar{y}_i.$$

On note $B_p^N = \{x \in \mathbb{C}^N : \|x\|_p \leq 1\}$ et $\mathcal{S}_p^{N-1} = \{x \in \mathbb{C}^N : \|x\|_p = 1\}$. On dit que x est s -sparse quand $|\text{supp}(x)| \leq s$ où $\text{supp}(x) = \{i \in \{1, \dots, N\} : x_i \neq 0\}$. L’ensemble des vecteurs s -sparse est noté $\Sigma_s = \{x \in \mathbb{C}^N : |\text{supp}(x)| \leq s\}$ et $\mathcal{U}_s = \{x \in \mathcal{S}_2^{N-1} : |\text{supp}(x)| \leq s\}$. Pour tout $I \subset \{1, \dots, N\}$, on note par $P_I x$ le vecteur de \mathbb{C}^N qui coïncide avec x sur les coordonnées dans I et qui est nul sur le complément de I . Pour tout $T \subset \mathbb{C}^N$, $P_I T = \{P_I t : t \in T\}$.

2 L’algorithme du Basis Pursuit

Une approche naturelle pour reconstruire un vecteur $x \in \mathbb{C}^N$ à partir de l’information $\Gamma_I x$ sachant que x à un petit support est de chercher parmi tous les vecteurs $t \in \mathbb{C}^N$ tels $\Gamma_I t = \Gamma_I x$ celui qui a le support le plus petit. C’est-à-dire, on cherche à résoudre le problème d’optimisation

$$\underset{t \in \mathbb{C}^N}{\text{argmin}} (|\text{supp}(t)| : \Gamma_I t = \Gamma_I x) \tag{2.1}$$

où on note $\text{supp}(t) = \{i \in \{1, \dots, N\} : t_i \neq 0\}$ et pour tout ensemble T , $|T|$ est le cardinal de T .

Résoudre effectivement le problème de minimisation ℓ_0 de (2.1) requiert en général l’exploration d’un nombre exponentiel de supports dans $\{1, \dots, N\}$ et donc n’est pas envisageable en pratique (cf. [34]).

Cette complexité algorithmique de (2.1) vient du fait que la fonction “taille du support” aussi appelée fonction ℓ_0 , et définie par $t \in \mathbb{C}^N \mapsto |\text{supp}(t)|$, n’est pas une fonction convexe. Pour contourner ce problème, il est classique de convexifier les composantes non-convexes d’un problème d’optimisation. On est donc amené à chercher la fonction convexe la plus proche de la fonction ℓ_0 . Ce type de fonction est appelé *enveloppe convexe* dont nous rappelons la définition maintenant.

Définition 2.1 ([22]) Soient $N \geq 1$ un entier et C une partie convexe de \mathbb{C}^N . Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On appelle **enveloppe convexe** de f , la plus grande fonction convexe g telle que $g(x) \leq f(x)$ pour tout $x \in C$. On note par $\text{conv}(f)$, l’enveloppe convexe de f .

Cette définition a bien un sens car si \mathcal{C} représente l’ensemble de toutes les fonctions convexes plus petite que f alors $\sup_{g \in \mathcal{C}} g$ est toujours une fonction convexe et donc égale à $\text{conv}(f)$.

Théorème 2.2 *La norme ℓ_1 est l'enveloppe convexe de la fonction ℓ_0 sur B_∞^N , la boule unité de $(\mathbb{C}^N, \ell_\infty^N)$.*

Preuve : On ne montre le résultat que sur B_1^N . Pour obtenir le résultat sur B_∞^N , on a recours au bi-conjugué convexe de ℓ_0 . On renvoie lecteur intéressé à [22].

Pour tout $x \in B_1^N$, on a $\|x\|_1 \leq \|x\|_0$ donc si F est l'enveloppe convexe de ℓ_0 sur B_1^N , on aura : $\|x\|_1 \leq F(x)$ pour tout $x \in B_1^N$. Notamment, si on note par (e_1, \dots, e_N) la base canonique de \mathbb{C}^N , on voit que pour tout $i = 1, \dots, N$, $1 = \|\pm e_i\|_1 \leq F(\pm e_i) \leq \|\pm e_i\|_0 = 1$, donc $F(\pm e_i) = 1$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)^\top \in \mathbb{C}^N$ tel que $\sum_{i=1}^N |\lambda_i| \leq 1$. On a, par convexité de F et comme $F(0) = 0$ (car $\|0\|_1 \leq F(0) \leq \|0\|_0$),

$$\begin{aligned} \|\lambda\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^N |\lambda_i| \text{sign}(\lambda_i) e_i \right\|_1 \leq F\left(\sum_{i=1}^N |\lambda_i| \text{sign}(\lambda_i) e_i + (1 - \|\lambda\|_1) 0 \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^N |\lambda_i| F(\text{sign}(\lambda_i) e_i) + (1 - \|\lambda\|_1) F(0) = \sum_{i=1}^N |\lambda_i| = \|\lambda\|_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Donc pour tout $\lambda \in B_1^N$ (la boule unité de (\mathbb{C}^N, ℓ_1^N)), $F(\lambda) = \|\lambda\|_1$. Ceci prouve que l'enveloppe convexe de ℓ_0 sur B_1^N est bien ℓ_1 . \square

C'est donc par relaxation convexe que la norme ℓ_1 apparaît dans le problème de Compressed Sensing. On est donc amené à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\underset{t \in \mathbb{C}^N}{\text{argmin}} \left(\|t\|_1 : \Gamma_I t = \Gamma_I x \right). \quad (2.3)$$

Ce problème est la relaxation convexe du problème (2.1). Il est appelé l'algorithme du *Basis Pursuit* (voir [14] et [7] pour les références historiques).

L'algorithme du Basis Pursuit s'est très vite popularisé grâce, en particulier, à ses propriétés algorithmiques. En effet, le problème (2.3) peut être réécrit comme un problème de programmation linéaire. En effet, (2.3) est équivalent au problème d'optimisation d'une fonctionnelle linéaire sous contraintes linéaires suivant :

$$\begin{aligned} &\text{minimise} && \sum_{i=1}^N z_i \\ &\text{sous les contraintes} && \Gamma_I x = \Gamma_I t \text{ et } -z_i \leq t_i \leq z_i, \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.4)$$

On vérifie facilement que t^* est solution de (2.3) si et seulement si $(t^*, z^* = (|t_1^*|, \dots, |t_N^*|)^\top)$ est solution de (2.4).

Etant donné l'observation $\Gamma_I x$, on souhaite pouvoir reconstruire tout vecteur parcimonieux x , pour un niveau donné de parcimonie, en utilisant l'algorithme du Basis Pursuit. Cette propriété est une caractéristique de la matrice de mesures Γ_I pour laquelle il a été donné un nom qui est maintenant appelé dans la définition qui suit.

Définition 2.3 *Soit $A : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^m$ une matrice telle que $m \leq N$ et s un entier plus petit que N . On dit que A vérifie la propriété de **reconstruction exacte d'ordre s** quand pour tout vecteur s -sparse x , on a*

$$\underset{t \in \mathbb{C}^N}{\text{argmin}} \left(\|t\|_1 : At = Ax \right) = \{x\}.$$

On dit alors que A vérifie $RE(s)$.

La propriété de reconstruction exacte d'ordre s caractérise donc les matrices de mesures qui permettent de reconstruire les vecteurs s -sparse x à partir de la donnée Ax grâce à l'algorithme de Basis Pursuit. Un des objectifs de cet exposé est de déterminer des ensembles I de fréquences et les entiers s tels que Γ_I vérifie la propriété de reconstruction exacte d'ordre s . La section suivante donne des conditions suffisantes de reconstruction exacte d'ordre s .

Mais pour le moment, on peut déjà établir une borne inférieure sur la taille m des matrices vérifiant cette propriété. C'est-à-dire, la propriété de reconstruction exacte implique un nombre minimum de mesures à prendre. En effet, pour $A : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^m$, on considère l'espace vectoriel quotient $\ell_1^N / \ker A$, la fonction quotient et la norme quotient :

$$Q : \ell_1^N \mapsto \ell_1^N / \ker A \text{ et } \|Qx\|_1 = \min_{h \in \ker A} \|x + h\|_1.$$

Si A vérifie $RE(2s)$ alors pour tout $x \in \Sigma_{2s}$, on a $\|Qx\|_1 = \|x\|_1$, c'est-à-dire Q préserve les normes sur Σ_{2s} . Comme $\Sigma_s - \Sigma_s \subset \Sigma_{2s}$, on a pour tout $x, y \in \Sigma_s$,

$$\|Qx - Qy\|_1 = \|x - y\|_1. \quad (2.5)$$

C'est-à-dire Q est une isométrie sur Σ_s . On va pouvoir bénéficier de cette isométrie pour transporter la complexité métrique de l'ensemble (Σ_s, ℓ_1^N) dans l'espace quotient $\ell_1^N / \ker A$ qui est au plus de dimension m (bien plus petite que la dimension N de l'espace ambiant) et donc en déduire une borne inférieure sur m (car la boule unité de $\ell_1^N / \ker A$ va devoir contenir un ensemble 1/2-séparé de grande taille vue l'isométrie de Q sur Σ_s).

On commence d'abord par étudier la complexité de (Σ_s, ℓ_1^N) . On utilise le lemme suivant (qui peut être obtenu par une énumération successive).

Lemme 2.4 *Soit $s \leq N/2$. Il existe une famille \mathcal{S} d'ensembles de $\{1, \dots, N\}$ telle que*

1. $\forall S \in \mathcal{S}, |S| = s$,
2. $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{S}, S_1 \neq S_2 \Rightarrow |S_1 \cap S_2| \leq s/2$,
3. $\log |\mathcal{S}| \geq \frac{s}{2} \log \left(\frac{N}{8es} \right)$.

On considère un ensemble \mathcal{S} comme défini dans Lemma 2.4 et pour tout $S \in \mathcal{S}$, on note $x(S) = s^{-1} \sum_{i \in S} e_i \in B_1^N$. On a pour tout $S_1 \neq S_2 \in \mathcal{S}$

$$\|x(S_1) - x(S_2)\|_1 = \left\| \frac{1}{s} \sum_{i \in S_1 \Delta S_2} e_i \right\|_1 = \frac{|S_1 \Delta S_2|}{s} \geq \frac{1}{2}.$$

Il s'ensuit de la propriété d'isométrie (2.5) que la boule unité de $\ell_1^N / \ker A$ contient un ensemble 1/2-séparé pour sa norme naturelle de cardinal $|\mathcal{S}|$. Or un tel ensemble est de cardinal au plus $7^{\text{rang} A}$ (où $\text{rang} A = \dim(\ell_1^N / \ker A)$). Donc $|\mathcal{S}| \leq 7^{\text{rang} A}$. Ceci implique $(s/2) \log(N/(8es)) \leq (\log 7) \text{rang} A \leq m \log 7$. On a donc montré le résultat suivant (voir [12]) :

Proposition 2.5 *Soit $A : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^m$ une matrice vérifiant $RE(2s)$ alors*

$$m \geq \frac{s}{2 \log 7} \log \left(\frac{N}{8es} \right).$$

On en déduit que pour pouvoir reconstruire tout vecteur s -sparse x à partir de m mesures Ax grâce au Basis Pursuit, on doit nécessairement avoir m au moins de l'ordre de $s \log(eN/s)$. On verra par la suite qu'il existe bien des matrices vérifiant $RE(2s)$ avec m de l'ordre de $s \log(eN/s)$.

Remarque 2.6 *Il existe un grand nombre d’algorithmes autres que le Basis Pursuit en Compressed Sensing. Pour une liste de ces algorithmes, on réfère le lecteur à la thèse de Master de Graeme Pope à l’ETH, Zürich, intitulée “Compressive Sensing. A summary of reconstruction algorithms”.*

Remarque 2.7 *Les méthodes mettant en oeuvre la norme ℓ_1 comme fonction d’objectif à minimiser ou comme fonction de pénalité sont pléthore. Elles ont été utilisées empiriquement dans diverses domaines comme la géologie/géophysique (Claerbout et Muir (1973), Taylor et al. (1979), Levy and Fullager (1981), Oldenburg et al. (1983), Santosa and Symes (1988)) en radioastronomie (Högbom (1974), Schwarz (1978)) en spectroscopie (Kawata et al. (1983), Mammone (1983), Minami et al. (1985), Barkhuijsen (1985), Newman (1988)), en imagerie médicale (Papoulis and Chamzas (1979)) etc.. Les autres méthodes célèbres utilisant la normes ℓ_1 sont le LASSO, le Dantzig selecteurs ou encore le Matching Pursuit. Une généralisation possible au matrice est l’utilisation de la norme nucléaire aussi appelée norme Schatten S_1 qui est l’enveloppe convexe de la fonction de rang.*

3 Conditions de reconstruction exacte

Beaucoup de recherches ont portées ces dernières années sur une meilleure compréhension de la propriété de reconstruction exacte d’une matrice $A : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^m$. De nombreuses conditions suffisantes (voire nécessaires) ont émergé dont les plus célèbres sont rappelées dans cette partie.

3.1 Propriété d’isométrie restreinte

Définition 3.1 [10] *Soit A une matrice de \mathbb{C}^N dans \mathbb{C}^m , s un entier plus petit que N et $0 < \delta < 1$. On dit que A vérifie la **propriété d’isométrie restreinte d’ordre s et de constante δ** quand pour tout vecteur s -sparse x , on a*

$$(1 - \delta) \|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq (1 + \delta) \|x\|_2.$$

Dans ce cas, on dit que A vérifie $RIP(s, \delta)$.

Cette propriété porte sur toutes les sous-matrices de A de taille $m \times s$. On voit déjà apparaître ici un argument de type combinatoire car le nombre de sous matrices de A de taille $m \times s$ est de l’ordre de $\binom{N}{s}$. Ce qui, dans le cas des matrices aléatoires, nous portera à étudier des variables aléatoires ayant de très bonnes propriétés de concentration (par exemple, des variables sous-gaussiennes). Ces fortes propriétés de concentration nous permettrons de “balancer” cette grande complexité de type combinatoire (voir [11, 38, 27, 28]). Dans le cas de variables “moins concentrées” l’argument est beaucoup plus délicat (voir [2, 1]). Dans le cas de matrices extraites aléatoirement de matrices structurées (comme le cas des matrices de Fourier), le résultat optimal n’a pas encore été prouvé (voir [11] et [38]).

Jusqu’ici, nous n’avons pas encore introduit de variables aléatoires, on verra plus tard que jusqu’à maintenant seules les matrices aléatoires sont connues pour vérifier la condition $RIP(s, \delta)$ avec un nombre m de lignes proportionnel au paramètre de parcimonie s , à des termes logarithmiques près. C’est-à-dire, étant donné N et s , on ne sait pas construire de matrices de taille $m \times N$ où m est de l’ordre de grandeur de s à des termes logarithmiques près qui vérifie $RIP(s, \delta)$ en un temps polynomial. Ce problème est connu sous le nom de **construction de matrices déterministes satisfaisant RIP**. Les meilleurs résultats dans ce sens nécessitaient $m = s^2$ mesures. C’est-à-dire, on avait besoin d’au moins s^2 observations pour pouvoir reconstruire tous vecteurs

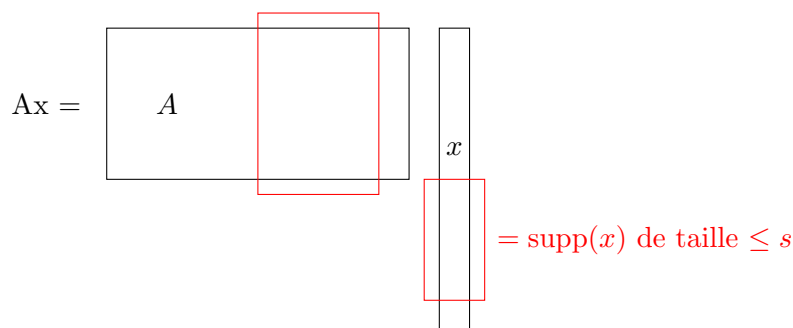


FIGURE 2 – Toutes les sous-matrices de A de taille $m \times s$ sont des $(1 + \delta)$ -isométries de ℓ_2^s dans ℓ_2^m quand A vérifie $RIP(s, \delta)$.

s -sparse à partir de Ax où A est construite de manière déterministe. Le nombre d'observation s^2 est apparu longtemps comme une sorte de "bottleneck" en dessous duquel, il semblait difficile de pouvoir aller (c'est-à-dire construire des matrices $RIP(s, \delta)$ de manière déterministe avec un nombre de lignes $m \ll s^2$). Ce "bottleneck" a été récemment "cassé" dans [6] qui construit des matrices déterministes ayant $m = s^{2-\epsilon}$ lignes pour un certain $\epsilon > 0$ et vérifiant $RIP(s, \delta)$. Ce résultat est le meilleur résultat actuellement pour la construction déterministe de matrices RIP. Mais on reste toujours loin des performances atteintes par les matrices aléatoires.

La propriété d'isométrie restreinte a aussi été appelée **principe d'incertitude uniforme**, noté UUP. Ce point de vue est tout aussi intéressant que l'aspect matriciel même s'il semble avoir été presque abandonné par rapport à l'approche matricielle.

Il existe plusieurs principes d'incertitudes pour l'analyse sur \mathbb{R} (voir [18]) et beaucoup moins pour l'analyse harmonique discrète (nous en verrons cependant différentes formulations plus tard).

Nous faisons maintenant une petite digression sur le principe d'incertitude d'Heisenberg. On commence par fixer les notations. Pour une fonction $f \in L_1(\mathbb{R})$ à valeurs complexes, la transformée de Fourier de f peut être définie par

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-it\omega) dt \text{ pour tout } \omega \in \mathbb{R}.$$

Un résultat fondamental en analyse harmonique est celui de Werner Heisenberg de 1927 qui a eu des répercussions considérables notamment en mécanique quantique : "il est impossible de mesurer précisément la position et la vitesse d'une particule simultanément". Cette propriété est due au fait que "position et moments" sont des transformées de Fourier l'une de l'autre (en termes d'opérateurs). On propose maintenant un énoncé possible de ce principe.

Théorème 3.2 (Principe d'incertitude d'Heisenberg) *Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ est une fonction de carré intégrable alors pour tous nombres réels t_0 et ω_0 , on a*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} (t - t_0)^2 |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (\omega - \omega_0)^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \right) \geq \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^2.$$

Preuve : On donne la preuve dans le cas où f est C_c^1 et à valeurs réelles. Le cas général suit par un argument limite.

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\widehat{f}(\omega)|^2 d\omega \right) &= \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 |f(t)|^2 dt \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f'(t)|^2 dt \right) \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}} |tf(t)f'(t)| dt \right)^2 \geq \frac{1}{4} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt \right)^2. \end{aligned}$$

On a utilisé successivement que $\widehat{f}'(\omega) = \omega \widehat{f}(\omega), \forall \omega$, l'inégalité de Parseval, celle de Cauchy-Schwarz puis une intégration par partie. Le cas général suit en appliquant le résultat précédent à $f_{t_0, \omega_0}(t) = \exp(-i\omega_0 t) f(t + t_0), \forall t \in \mathbb{R}$. \square

En particulier, si Q et P sont deux mesures de probabilité sur \mathbb{R} telles que $dQ/d\lambda = |f|^2 / \|f\|_2$ et $dP/d\lambda = |\widehat{f}|^2 / \|\widehat{f}\|_2$ alors le principe d'incertitude de Heisenberg dit que $\text{var}(P)\text{var}(Q) \geq 1/4$. C'est-à-dire quand on observe $X \sim P$ et $Y \sim Q$ on a forcément un peu d'incertitude soit sur X soit sur Y autour de leur valeur moyenne.

Le principe d'incertitude sur \mathbb{R} qui nous intéresse plus particulièrement est celui concernant les supports de f et de sa transformée de Fourier \widehat{f} .

Théorème 3.3 *Soit f une fonction de $L_1(\mathbb{R}, \lambda)$ à valeurs complexes où λ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . On note $S(f) = \{t \in \mathbb{R} : f(t) = 0\}$ et $S(\widehat{f}) = \{\omega \in \mathbb{R} : \widehat{f}(\omega) = 0\}$. Si $\lambda(S(f)) \times \lambda(S(\widehat{f})) < \infty$ alors $f = 0$.*

En particulier, on ne peut pas trouver une fonction non nulle à support compact telle que sa transformée de Fourier soit aussi à support compact. Ce genre de principe d'incertitude s'étend d'une certaine manière à l'analyse de Fourier discrète.

Théorème 3.4 (Principe d'incertitude de Donoho et Stark, [13]) *Pour tout $x \in \mathbb{C}^N$ non nul, on a $|\text{supp}(x)| |\text{supp}(\widehat{x})| \geq N$.*

Preuve : Soit $x \in \mathbb{C}^N$ non nul. On a

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}\|_\infty &= \max_{1 \leq q \leq N} \frac{1}{\sqrt{N}} \left| \sum_{p=1}^N x_p \exp\left(\frac{-2i\pi}{N}(p-1)(q-1)\right) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{p=1}^N |x_p| \\ &\leq \sqrt{\frac{|\text{supp}(x)|}{N}} \left(\sum_{p=1}^N |x_p|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{|\text{supp}(x)|}{N}} \|\widehat{x}\|_2 \leq \sqrt{\frac{|\text{supp}(x)| |\text{supp}(\widehat{x})|}{N}} \|\widehat{x}\|_\infty. \square \end{aligned}$$

Le cas d'égalité est atteint par les signaux constants sur les sous-groupes de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On montre que de tels signaux saturent le principe d'incertitude de Donoho et Stark. On suppose que N n'est pas un nombre premier (de telle sorte que $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ n'a pas que des sous-groupes triviaux). On peut donc écrire $N = s\tau$ avec $s, \tau > 1$. On considère le signal x s -sparse et sa transformée de Fourier \widehat{x} définis pour tout $p = 1, \dots, N$ par

$$x_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{\tau} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \widehat{x}_p = \begin{cases} s/\sqrt{N} & \text{si } p \equiv 1 \pmod{s} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

En effet, on a

$$\widehat{x}_p = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{q=1}^N x_q \exp\left(-\frac{2i\pi}{N}(p-1)(q-1)\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=0}^{s-1} \exp\left(-\frac{2i\pi}{s}r(p-1)\right).$$

Si $p \equiv 1 \pmod{s}$ alors $(p-1)/s$ est un entier et donc $\widehat{x}_p = s/\sqrt{N}$ sinon $\exp(-2i\pi(p-1)/s)$ est une racine s -ième de l'unité différente de 1 et donc $\widehat{x}_p = 0$. Notamment, x est un vecteur s -sparse et \widehat{x} est un vecteur N/s -sparse. On voit bien que pour ce signal $|\text{supp}(x)| |\text{supp}(\widehat{x})| = N$.

Le principe d'incertitude de Donoho et Stark est donc optimal. Cependant, on voit que ce sont les sous-groupes non triviaux de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ qui "limitent" en quelques sortes ce principe d'incertitude. En particulier, si N est premier alors $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ n'a pas de sous-groupes non triviaux et on peut alors espérer un meilleur résultat. C'est ce qu'à démontré Tao.

Théorème 3.5 (Principe d’incertitude de Tao, [42]) *Soit N un nombre premier. Pour tout $x \in \mathbb{C}^N$ non nul, on a $|\text{supp}(x)| + |\text{supp}(\hat{x})| \geq N + 1$.*

Le principe d’incertitude de Donoho et Stark est saturé par des signaux très particuliers de la forme $x = c_0 \mathbb{1}_H$ où H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Ce genre de signaux ne sont pas “typiques” en traitement du signal. Une façon - qui peut être discutable - de ne considérer que des signaux “typiques” est de générer leur support de manière aléatoire. Pour de tel signaux, Candès et Romberg ont prouvé le principe d’incertitude suivant.

Théorème 3.6 ([8, 9]) *Soit $\rho_0 = \sqrt{2/3}$ et $1 \leq \beta \leq (3/8) \log N$. On choisit un couple d’entier N_T et N_Ω tels*

$$N_T + N_\Omega \leq \frac{N}{\sqrt{(1 + \beta) \log N}} (\rho/2 + o(1)).$$

Soit $T \subset \{1, \dots, N\}$ tel que $|T| = N_T$. Soit $\Omega \subset \{1, \dots, N\}$ choisit uniformément parmi tous les supports de taille N_Ω . Alors, avec probabilité plus grande que $1 - \mathcal{O}(\sqrt{\log N}/N^\beta)$ tout signal x supporté par T est tel que

$$\|\hat{x} \times \mathbb{1}_\Omega\|_2^2 \leq \frac{\|\hat{x}\|_2^2}{2}.$$

De même tout signal x tel que \hat{x} est supporté par Ω est tel que

$$\|x \times \mathbb{1}_T\|_2^2 \leq \frac{\|x\|_2^2}{2}.$$

Notamment, avec cette même probabilité, il n’existe pas de signal x supporté par T tel que \hat{x} est supporté par Ω .

La propriété RIP (ou UUP) peut être vu comme un principe d’incertitude quantitatif uniforme sur \mathcal{U}_s . En quelques sortes, il permet de quantifier l’idée que “si x est un vecteur de petit support alors sa transformée de Fourier aura un large support et de plus \hat{x} aura sa masse “bien étalée” sur son support”. C’est cette idée qui apparaît dans les Théorèmes 3.4, 3.5 et 3.6 et qui est quantifiée dans la condition RIP.

Par exemple, donnons une interprétation de la condition RIP en terme de principe d’incertitude, dans le cas de la matrice de Fourier extraite pour des fréquences $I \subset \{1, \dots, N\}$. Après renormalisation, on voit qu’il faut regarder la condition RIP pour $A = \sqrt{N/|I|} \Gamma_I$. Selon le Théorème 3.6, ce principe est d’autant plus vrai qu’on “ajoute” un peu d’aléatoire. C’est pourquoi, on choisira plus tard les fréquences dans I de manière aléatoire. Pour le moment, on suppose que $A = \sqrt{N/|I|} \Gamma_I$ vérifie $RIP(s, \delta)$. On a donc pour tout vecteur x s -sparse

$$\|P_I \hat{x}\|_2 = \|\Gamma_I x\|_2 \sim \sqrt{\frac{|I|}{N}} \|\hat{x}\|_2. \quad (3.2)$$

Ceci nous conforte dans l’idée que “l’énergie” de \hat{x} est “bien étalée” sur son support. C’est-à-dire que les coordonnées de \hat{x} sont à peu près de l’ordre de grandeur de $\|\hat{x}\|_2 / \sqrt{|\text{supp}(x)|}$ (au moins sur I) et que $|\text{Supp}(x)|$ est de l’ordre de N . La Figure 3.1 représente cette intuition. On dit dans ce cas que l’opérateur P_I “shrink” (rétrécit) les vecteurs \hat{x} quand x est parcimonieux. La propriété RIP est donc bien un principe d’incertitude sur les vecteurs parcimonieux. Ceci justifie son autre appellation UUP pour “Uniform Uncertainty Principle”.

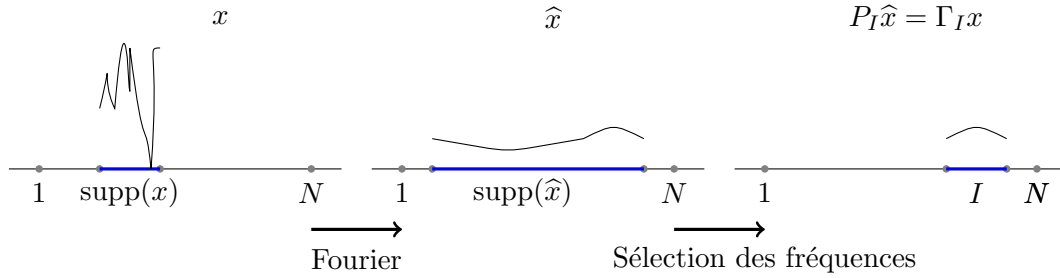


FIGURE 3 – RIP : si x est parcimonieux alors \hat{x} est “bien étalé” sur son support de large taille, de telle sorte que $\|P_I \hat{x}\|_2$ est de l’ordre de grandeur de $\sqrt{|I|/N} \|\hat{x}\|_2$. C’est-à-dire P_I “rétrécit” les vecteurs \hat{x} quand x est parcimonieux.

3.2 Sections presque euclidiennes

Dans un espace de Banach, on dit qu’une section de la boule unité par un sous-espace vectoriel est presque Euclidienne quand l’intersection de la boule unité avec ce sous-espace contient une ellipsoïde et est contenue dans c fois cette ellipsoïde (où c est une constante absolue). On peut ainsi dire que la norme de cet espace de Banach restreinte à cet espace vectorielle est équivalente à une norme euclidienne. On réfère le lecteurs aux bouquins [37, 26, 41, 32] pour plus de détails sur ce sujet.

L’intérêt pour les sections euclidiennes dans les espaces de Banach remonte aux années 1950. Elles ont été utilisées par Dvoretzky et Rodgers (cf. [15]) pour résoudre la question ouverte pendant plus de vingt ans : étant donné un espace de Banach, existe-t’il une suite convergente qui n’est pas absolument convergente ? La réponse affirmative peut se trouver dans [15]. Ce résultat utilise seulement l’inclusion d’une ellipsoïde dans une section de la boule unité de l’espace de Banach considéré. Ce résultat fut étendu à une “vraie” section euclidienne dans les articles de Dvoretzky [16, 17] qui sont à l’origine de nombreux autres résultats. Ce théorème est connu maintenant sous le nom de Théorème de Dvoretzky dont V. Milman a montré le rôle prépondérant de la concentration de la mesure dans sa preuve (cf. [30] voir aussi [31, 29, 33]). Un point aussi très important dans le théorème de Dvoretzky est sa/ses méthodes de preuve qui utilisent la théorie des probabilités comme outil essentiel. Il n’existe à ce jour aucune preuve “déterministe” (c’est-à-dire, n’utilisant pas d’outils issus de la théorie des probabilités) du théorème de Dvoretzky. Pour énoncer ce résultat, on introduit la distance de Banach-Mazur qui permet une écriture concise du Théorème de Dvoretzky.

Définition 3.7 Soient X et Y deux espaces de Banach. On appelle **distance de Banach-Mazur** la quantité

$$d(X, Y) = \begin{cases} \inf (\|T\| \|T^{-1}\| : T : X \rightarrow Y \text{ isomorphisme}) \\ 0 \text{ s'il n'existe pas d'isomorphisme entre } X \text{ et } Y \end{cases}$$

La distance de Banach-Mazur n’est pas une distance mais $\log d$ est une semi-métrique. Le lien entre la distance de Banach-Mazur et les sections euclidiennes est rappelé dans la proposition suivante.

Proposition 3.8 Soit $(B, \|\cdot\|)$ une espace de Banach sur \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C}) de dimension N et $\delta > 0$. Il y a équivalence entre les propositions suivantes :

1. $d(F, \ell_2^N) \leq 1 + \delta$.
2. il existe $f_1, \dots, f_N \in F$ et $0 < \alpha < \beta$ tels que $\beta/\alpha \leq 1 + \delta$ et pour tout $a \in \mathbb{K}^N$,

$$\alpha \|a\|_2 \leq \left\| \sum_{i=1}^N a_i f_i \right\| \leq \beta \|a\|_2.$$

Preuve : Soit $T : B \mapsto \ell_2^N$ tel que $\|T\| \|T^{-1}\| \leq 1 + \delta$. Pour tout $a \in \mathbb{K}^N$, on a $\|T\|^{-1} \|a\|_2 \leq \|T^{-1}a\| \leq \|T^{-1}\| \|a\|_2$. Donc le résultat suit pour $f_i = T^{-1}e_i, \forall i = 1, \dots, N$ où (e_1, \dots, e_N) est la base canonique de \mathbb{K}^N .

Pour la réciproque, on définit $T : B \mapsto \ell_2^N$ par $Tf_i = e_i, \forall i = 1, \dots, N$. On a pour tout $a \in \mathbb{K}^N$, $\alpha \|a\|_2 \leq \|T^{-1}a\| \leq \beta \|a\|_2$. Alors, $\|T^{-1}\| \leq \beta$ et $\|T\| \leq \alpha^{-1}$. Donc $\|T\| \|T^{-1}\| \leq 1 + \delta$. \square

On énonce maintenant la version “moderne” du théorème de Dvoretzky qui a une version en dimension infinie et une version locale (c’est-à-dire concernant les espaces de Banach de grandes dimensions finies).

Théorème 3.9 (Théorème de Dvoretzky)

1. Soit B un espace de Banach de dimension infinie. Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un sous-espace vectoriel F de B de dimension N tel que $d(F, \ell_2^N) \leq 1 + \epsilon$.
2. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ et tout espace de Banach B de dimension N , il existe un sous-espace vectoriel F de B de dimension $k = \delta \log N$ pour lequel $d(F, \ell_2^k) \leq 1 + \epsilon$.

La version locale du théorème de Dvoretzky est particulièrement intéressante car elle fait apparaître la dimension $\log N$. On a donc, par Dvoretzky “quantitatif” ou “local”, que tout Banach de dimension N a une section presque euclidienne de dimension proportionnelle à $\log N$. La dimension $\log N$ est optimale comme le montre le cas de B_∞^N .

Proposition 3.10 Soit k un entier plus petit que N . S’il existe un sous-espace vectoriel F de dimension k de B_∞^N tel que $d(F, \ell_2^k) \leq 2$ alors $k \leq c \log N$.

Preuve : Soit (f_1, \dots, f_k) une base de F telle que tout $a \in \mathbb{C}^k$ vérifie

$$\|a\|_2 \leq \left\| \sum_{i=1}^k a_i f_i \right\|_\infty \leq 2 \|a\|_2. \quad (3.3)$$

On applique (3.3) au vecteur aléatoire $\vec{\epsilon} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k)^\top$ dont les coordonnées sont des variables de Rademacher i.i.d., puis on prend l’espérance :

$$c_0 \sqrt{k} \leq \mathbb{E} \|\vec{\epsilon}\|_2 \leq \mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^k \epsilon_j f_j \right\|_\infty \leq 2 \mathbb{E} \|\vec{\epsilon}\|_2 \leq 2\sqrt{k}.$$

Par une inégalité maximal, on obtient que

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{j=1}^k \epsilon_j f_j \right\|_\infty = \mathbb{E} \max_{x \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_N\}} \sum_{j=1}^k \epsilon_j \langle x, f_j \rangle \leq c \sqrt{\log N} \max_{x \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_N\}} \left(\sum_{j=1}^k \langle x, f_j \rangle \right)^{1/2}.$$

Soit $x \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_N\}$. On applique (3.3) au vecteur $(\langle x, f_1 \rangle, \dots, \langle x, f_N \rangle)^\top$. On a d'abord,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^k \langle x, f_j \rangle f_j \right\|_\infty &= \max_{y \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_N\}} \left\langle y, \sum_{j=1}^k \langle x, f_j \rangle f_j \right\rangle \\ &= \max_{y \in \{\pm e_1, \dots, \pm e_N\}} \sum_{j=1}^k \langle y, f_j \rangle \langle x, f_j \rangle \geq \sum_{j=1}^k \langle x, f_j \rangle^2. \end{aligned}$$

On a alors d'après (3.3) que

$$\sum_{j=1}^k \langle x, f_j \rangle^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^k \langle x, f_j \rangle f_j \right\|_\infty \leq 2 \left(\sum_{j=1}^k \langle x, f_j \rangle^2 \right)^{1/2}.$$

Ce qui conclut l'argument. \square

On voit donc que la dimension maximale d'une section euclidienne de B_∞^N est au mieux de l'ordre de $\log N$. Ce qui prouve l'optimalité du Théorème de Dvoretzky locale. Mais dans certains cas, on peut avoir de très grandes sections euclidiennes. C'est le cas des espaces ayant un cotype non trivial.

Définition 3.11 *On dit qu'un espace de Banach est de **cotype** q pour un certain $2 \leq q \leq +\infty$ quand pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x_1, \dots, x_n dans B , on a*

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{C} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q}$$

où $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ sont des Rademacher i.i.d.. La meilleure constante C s'appelle la **constante de cotype** de B , et se note $C_q(B)$.

Cette propriété des espaces de Banach est une propriété locale car elle ne concerne que les sous-espaces vectoriels de dimension finie. Les espaces de Hilbert sont de cotype 2. Tout espace est trivialement de cotype $+\infty$ car

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \geq \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i\|. \quad (3.4)$$

L'inégalité (3.4) peut se déduire de la croissance des suites de Rademacher : pour toute suite $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de B et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\| \leq \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i x_i \right\|.$$

En effet, pour $y = y(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in B^*$ de norme 1 tel que $\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\| = \langle y, \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \rangle$ on a

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i x_i \right\| \geq \langle y, \sum_{i=1}^{n+1} \epsilon_i x_i \rangle = \langle y, \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \rangle + \epsilon_{n+1} \langle y, x_{n+1} \rangle = \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\| + \epsilon_{n+1} \langle y, x_{n+1} \rangle$$

et le résultat suit quand on prend l'espérance car y est indépendant de ϵ_{n+1} .

L'espace c_0 des suites bornées ne possède aucun cotype non trivial car si on note par $(e_i)_{i \geq 1}$ sa base canonique, on a pour tout $2 \leq q \leq +\infty$ et tout entier n ,

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i e_i \right\|_{\infty}^2 \right)^{1/2} = 1 \text{ et } \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|_{\infty}^q \right)^{1/q} = n^{1/q}.$$

La propriété de cotype d'un espace de Banach est impliquée par des propriétés de convexité de sa boule unité. On mesure généralement la convexité ou rotondité de la boule unité d'un espace de Banach B par **son module de convexité** : pour tout $0 < \epsilon \leq 2$,

$$\delta_B(\epsilon) = \inf \left(1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| : \|x\| = \|y\| = 1 \text{ et } \|x-y\| \geq \epsilon \right). \quad (3.5)$$

Le module de convexité "généralise" aux espaces de Banach l'identité du parallélogramme des espaces de Hilbert car un résultat de Pisier (voir [35]) montre que

$$\delta_B(\epsilon) \geq A\epsilon^q, \forall 0 < \epsilon \leq 2 \Leftrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\|^q + C \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^q \leq \frac{\|x\|^q + \|y\|^q}{2}, \forall x, y \in B \quad (3.6)$$

pour $A \sim_q C$.

Les espaces de Hilbert sont les espaces de Banach les "plus convexes" : si H est un espace de Hilbert alors son module de convexité est $\delta_H(\epsilon) = 1 - \sqrt{1 - \epsilon^2/4}$ et tout espace de Banach B est tel que $\delta_B(\epsilon) \leq \delta_H(\epsilon)$ pour tout $0 < \epsilon \leq 2$.

On déduit des inégalités de Clarkson que le module de convexité de ℓ_p^N pour $1 < p < \infty$ est donné, pour tout $0 < \epsilon \leq 2$, par

$$\delta_{\ell_p^N}(\epsilon) = \begin{cases} \frac{(p-1)\epsilon^2}{8} + o(\epsilon^2) & \text{quand } 1 < \epsilon \leq 2 \\ \frac{\epsilon^p}{p2^p} + o(\epsilon^p) & \text{quand } p \geq 2. \end{cases}$$

Pour $p = 1$, il est facile de voir que ℓ_1^N est tel que $\delta_{\ell_1^N}(\epsilon) = 0, \forall 0 < \epsilon \leq 1$. Donc B_1^N n'a pas de rotondité non-triviale.

Le lien entre le cotype d'un espace de Banach et la rotondité de sa boule unité est rappelé dans la proposition suivante.

Proposition 3.12 *Soit B un espace de Banach et $q \geq 2$. Si le module de convexité de B est tel que $\delta_B(\epsilon) \geq A\epsilon^q, \forall 0 < \epsilon \leq 2$ alors B est de cotype q et sa constante de cotype est telle que $C_q(B) \leq c_q A^{-1/q}$.*

Preuve : L'inégalité de Khintchine-Kahane dit que pour tout n et tout $x_1, \dots, x_n \in B$, on a

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{q-1}} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q}.$$

Par ailleurs, pour tout $x, y \in B$, on a par q -convexité de B que

$$\mathbb{E} \|y + \epsilon x\|^q = \frac{1}{2} (\|y+x\|^q + \|y-x\|^q) \geq \|y\|^q + C \|x\|^q.$$

On en déduit par récurrence que

$$\left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^q \right)^{1/q} \geq C^{1/q} \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q \right)^{1/q}.$$

Le résultat suit par le le résultat de Pisier rappelé dans (3.6). \square

Cependant, il n'y a pas équivalence entre ces deux propriétés. Par exemple, le module de convexité de ℓ_1^N est nul (c'est-à-dire, B_1^N n'a pas de propriétés de rotondité particulière) mais ℓ_1^N est de cotype 2 : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}^N$,

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|_1^2 \right)^{1/2} &\geq \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|_1 = \sum_{j=1}^N \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_{ij} \right| \geq c_0 \sum_{j=1}^N \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_{ij} \right|^2 \right)^{1/2} \\ &= c_0 \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^n x_{ij}^2 \right)^{1/2} \geq c_0 \left(\sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^n |x_{ij}| \right)^2 \right)^{1/2} = c_0 \left(\sum_{j=1}^N \|x_j\|_1^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Khintchine-Kahane et ce qu'on appelle la 2-concavité de la norme ℓ_1^N .

On présente maintenant le lien entre cotype et taille des sections euclidiennes.

Théorème 3.13 *Soit B un espace de Banach de dimension N et $q \geq 2$. Si B est un espace de cotype q de constante de cotype $C_q(B) \leq c_0$ où c_0 est une constante ne dépendant pas de N alors B admet des sections presque euclidiennes de dimensions proportionnelles à $N^{2/q}$.*

Notamment, les espaces de cotype 2 – comme ℓ_p^N pour $1 \leq p \leq 2$ – admettent des sections euclidiennes de dimensions proportionnelles à N . Dans le cas particulier de ℓ_1^N , on peut même avoir des sections euclidiennes de dimension $N/2$ telle que la section orthogonale est aussi euclidienne. Ce genre de décomposition s'appelle une décomposition de Kashin.

Théorème 3.14 (Décomposition de Kashin) *Soit N un nombre pair. Il existe un espace vectoriel E de ℓ_1^N de dimension $N/2$ tel que, pour tout $x \in E \cup E^\perp$,*

$$\alpha \sqrt{N} \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{N} \|x\|_2,$$

où $0 < \alpha < 1$ est une constante absolue.

La preuve de Kashin se trouve dans [25]. Une preuve très simplifiée de ce résultat peut se trouver dans [19]. Pour le problème du Compressed Sensing, on s'intéresse particulièrement aux sections presque euclidiennes de la boule B_1^N . Mais contrairement aux résultats précédents, on ne cherche pas la dimension la plus grande des sections euclidiennes mais on se fixe une dimension (en fait une codimension) et on cherche un espace vectoriel ayant cette dimension precrite telle que l'intersection de la boule B_1^N et de cet espace soit de diamètre euclidien aussi petit que possible. Ce problème fait intervenir les fenêtres de Gelfand et leurs duales, les fenêtres de Kolmogorov.

Définition 3.15 *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et T un sous-ensemble de E . Pour tout entier k , on définit la **k-ième fenêtre de Gelfand** de T par*

$$d^k(T, E) = \inf_S \sup_{x \in S \cap T} \|x\|$$

où l'infimum est pris sur tous les sous-espaces vectoriels S de E de codimension au plus k .

La **k-ième fenêtre de Kolmogorov** de T est définie par

$$d_k(T, E) = \inf_F \sup_{x \in T} \inf_{y \in F} \|y - x\|$$

où l'infimum est pris sur tous les sous-espaces vectoriels F de E de dimension au plus k .

Les fenêtres de Gelfand et Kolmogorov sont reliées par un argument de dualité (voir [23]). On a par exemple le résultat suivant :

Théorème 3.16 *Pour tout $1 \leq p, q \leq +\infty$, on note par p^* (respectivement q^*) le conjugué de p (respectivement q). On a pour tout $1 \leq k \leq N$,*

$$d_k(B_p^N, \ell_q^N) = d^k(B_{q^*}^N, \ell_{p^*}^N).$$

Preuve : Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^N de dimension k . On note par $S = F^\perp$ son espace orthogonal (qui est donc de codimension k). On a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_p^N} \inf_{y \in F} \|x - y\|_q &= \sup_{x \in B_p^N} \inf_{y \in F} \sup_{z \in B_{q^*}^N} \langle z, x - y \rangle \geq \sup_{x \in B_p^N} \sup_{z \in B_{q^*}^N} \inf_{y \in F} \langle z, x - y \rangle \\ &= \sup_{x \in B_p^N} \sup_{z \in B_{q^*}^N \cap F^\perp} \langle z, x \rangle = \sup_{z \in B_{q^*}^N \cap S} \|z\|_{p^*}. \end{aligned}$$

On en déduit que $d_k(B_p^N, \ell_q^N) \geq d^k(B_{q^*}^N, \ell_{p^*}^N)$.

Soit S un sous-espace vectoriel de \mathbb{C}^N de codimension k . On note par $F = S^\perp$ son espace orthogonal (de dimension k) et pour tout $x \in \mathbb{C}^N$, on note $x = \pi_S x + \pi_F x$ où $\pi_S x \in S$ et $\pi_F x \in F$. On a

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B_p^N} \inf_{y \in F} \|x - y\|_q &= \sup_{x \in B_p^N} \inf_{y \in F} \|\pi_S x - (y - \pi_F x)\|_q = \sup_{x \in B_p^N \cap S} \inf_{y \in F} \|x - y\|_q \\ &= \sup_{x \in B_p^N \cap S} \inf_{y \in F} \sup_{z \in B_{q^*}^N} \langle z, x - y \rangle \leq \inf_{y \in F} \sup_{x \in B_p^N \cap S} \sup_{z \in B_{q^*}^N} \langle z, x - y \rangle = \inf_{y \in F} \sup_{z \in B_{q^*}^N} (\|\pi_S z\|_{p^*} - \langle z, y \rangle) \\ &\leq \inf_{y \in F} \sup_{z \in B_{q^*}^N} (\|\pi_S z\|_{p^*} + \|z\|_{q^*} \|y\|_q) \leq \sup_{z \in B_{q^*}^N \cap S} \|z\|_{p^*}. \end{aligned}$$

On en déduit que $d_k(B_p^N, \ell_q^N) \leq d^k(B_{q^*}^N, \ell_{p^*}^N)$. \square

Pour les fenêtres de Gelfand de B_1^N par rapport à la métrique euclidienne on a entre autres la dualité

$$d^k(B_1^N, \ell_2^N) = d_k(B_2^N, \ell_\infty^N).$$

On sait, grâce à [25] et [20] (voir [24]), calculer exactement les fenêtres de Gelfand de B_1^N pour la métrique euclidienne (à des constantes absolue près).

Théorème 3.17 *Il existe des constantes absolues $0 < c < C$ telles que pour tout $1 \leq k \leq n$,*

$$c \min \left(1, \sqrt{\frac{\log(eN/k)}{k}} \right) \leq d^k(B_1^N, \ell_2^N) \leq C \min \left(1, \sqrt{\frac{\log(eN/k)}{k}} \right).$$

Les fenêtres de Gelfand sont intéressantes en Compressed Sensing car on verra que le diamètre euclidien de la section de B_1^N par le noyau de la matrice de mesure $A : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^m$ détermine le niveau de sparsité s de reconstruction de A . On introduit donc la propriété suivante.

Définition 3.18 *Soit $A : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^m$ et $1 \leq s \leq N$. On dit que A satisfait la **propriété de fenêtre de Gelfand d'ordre s** , notée $\text{Gelfand}(s)$, quand*

$$\text{diam}(B_1^N \cap \ker A, \ell_2^N) = \sup_{x \in B_1^N \cap \ker A} \|x\|_2 < \frac{1}{\sqrt{s}}.$$

Dans le cas des matrices extraites de Fourier, on voit que

$$\ker \Gamma_I = \text{vect}(\Gamma_i : i \in I^c). \quad (3.7)$$

On est donc intéressé par les sections euclidiennes de B_1^N par des espaces vectoriels engendrés par des éléments de la base de Fourier. Ce problème a été particulièrement étudié par Bourgain dans [5, 3, 4] et Talagrand dans [40, 39]. On trouve aussi un résultat sur cette thématique dans [21]. On rappelle maintenant un résultat de Bourgain prouvé par Talagrand.

Théorème 3.19 ([40]) *Il existe un sous-ensemble J de $\{1, \dots, N\}$ de cardinal $c_0 N$ (où c_0 est une constante absolue positive non-nulle) tel que pour tout $x \in \text{vect}(\Gamma_i : i \in J)$,*

$$\alpha \sqrt{N} \|x\|_2 \leq \sqrt{\log N \log \log N} \|x\|_1.$$

Il existe donc un espace engendré par $c_0 N$ éléments de la base de Fourier tel que la section de B_1^N par cet espace est presque euclidienne à un terme en $\sqrt{\log N \log \log N}$ près. On sait d'après un contre-exemple de Bourgain prouvé dans [21] que le terme en $\sqrt{\log N}$ est nécessaire.

Théorème 3.19 ne s'applique pas directement en Compressed Sensing car il ne concerne que les sections de dimensions proportionnelles à N ou le paramètre de proportionnalité c_0 est généralement loin de 1 (de l'ordre de $c_0 = 1/10$). En Compressed Sensing, on s'intéresse au section de B_1^N par $\ker A$ qui est de dimension au moins $N - m$ avec $m \ll N$. On s'intéresse donc au régime de sections euclidiennes de dimensions en $(1 - \epsilon)N$ où ϵ est très petit (de l'ordre de $(s \log N)/N$). Ce régime a été étudié dans [21].

Théorème 3.20 ([21]) *Soit $1 \leq m \leq N$. Il existe un sous-ensemble J de $\{1, \dots, N\}$ de cardinal au moins $N - m$ tel que pour tout $x \in \text{vect}(\Gamma_i : i \in J)$,*

$$\alpha \sqrt{N} \|x\|_2 \leq \gamma (\log \gamma)^{5/2} \|x\|_1$$

où $\gamma = \sqrt{\frac{N}{m}} \sqrt{\log m}$.

L'ensemble J du Théorème 3.19 résulte d'une construction aléatoire. Tout comme la propriété RIP, les méthodes de preuves pour la détermination de sections euclidiennes est basée sur des outils probabilistes.

On voit donc, grâce au Théorème 3.20, que si $J \subset \{1, \dots, N\}$ est défini comme dans Théorème 3.20 alors pour $I = J^c$, on a

$$\text{diam}(B_1^N \cap \ker \Gamma_I, \ell_2^N) < \sqrt{\frac{c_1 (\log N) (\log m)^5}{m}}.$$

Alors, pour ce choix de fréquences I , Γ_I satisfait la propriété de Gelfand d'ordre $m/[c_1 (\log N) (\log m)^5]$. On verra par la suite que cela implique que Γ_I est une bonne matrice de mesure pour le Compressed Sensing pour les vecteurs s -sparses pour un nombre de mesures en $m \sim s (\log N) (\log m)^5$.

3.3 Connexions entre les propriétés d'isométrie restreinte, de fenêtre de Gelfand et de reconstruction exacte.

On montre dans cette section, la pertinence des propriétés d'isométrie restreinte et de fenêtre de Gelfand pour le problème de reconstruction exacte en Compressed Sensing.

Proposition 3.21 ([10, 24]) *Soit $1 \leq m \leq N$ et $A : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^m$. On a 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4) où*

1. A satisfait $RIP(128s, 1/4)$,
2. A est tel que $\text{diam}(B_1^N \cap \ker A, \ell_2^N) < 1/(2\sqrt{s})$ (c'est-à-dire A satisfait $Gelfand(4s)$),
3. pour tout $h \in \ker A - \{0\}$ et tout $I \subset \{1, \dots, N\}$ tel que $|I| \leq s$, on a $\|P_I h\|_1 < \|h\|_1 / 2$ (c'est-à-dire, A satisfait la "propriété du noyau" d'ordre s),
4. pour tout $x \in \Sigma_s$, $\text{argmin}_{t \in \mathbb{C}^N} (\|t\|_1 : At = Ax) = \{x\}$ (c'est-à-dire A satisfait $RE(s)$).

Preuve : On suppose que A satisfait $RIP(128s, 1/4)$. On note $s' = 64s$ et $\delta = 1/4$. Soit $x \in \ker A - \{0\}$. On veut montrer que $\|x\|_2 < \|x\|_1 / 2\sqrt{s}$. On note par I_1 l'ensemble des indices des s' coordonnées de x ayant les plus grands modules. Puis I_2 , l'ensemble des s' suivants etc. jusqu'à exhaustion des coordonnées de x . Pour tout entier k , on note par $P_{I_k} x$ le vecteur de \mathbb{C}^N qui coïncide avec x sur I_k et vaut zéro ailleurs.

Pour tout $k \geq 2$, on a $\|P_{I_k} x\|_2 \leq \sqrt{s'} \|P_{I_k} x\|_\infty \leq (1/\sqrt{s'}) \|P_{I_{k-1}} x\|_1$. En particulier,

$$\|x - P_{I_1} x - P_{I_2} x\|_2 = \left\| \sum_{k \geq 3} P_{I_k} x \right\|_2 \leq \sum_{k \geq 3} \|P_{I_k} x\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{s'}} \sum_{k \geq 3} \|P_{I_{k-1}} x\|_1 = \frac{\|P_{I_1^c} x\|_1}{\sqrt{s'}}.$$

Grâce à $RIP(2s', \delta)$, on a

$$\begin{aligned} \|P_{I_1} x + P_{I_2} x\|_2 &\leq \frac{1}{1-\delta} \|A(P_{I_1} x + P_{I_2} x)\|_2 = \frac{1}{1-\delta} \|A(x - P_{I_1} x - P_{I_2} x)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{1-\delta} \sum_{k \geq 3} \|A P_{I_k} x\|_2 \leq \frac{1+\delta}{1-\delta} \sum_{k \geq 3} \|P_{I_k} x\|_2 \leq \frac{1+\delta}{1-\delta} \frac{\|P_{I_1^c} x\|_1}{\sqrt{s'}}. \end{aligned}$$

On en déduit, pour $\delta = 1/4$ et $s' = 64s$, que

$$\|x\|_2 \leq \|x - P_{I_1} x - P_{I_2} x\|_2 + \|P_{I_1} x + P_{I_2} x\|_2 \leq \frac{2}{1-\delta} \frac{\|P_{I_1^c} x\|_1}{\sqrt{s'}} < \frac{\|x\|_1}{2\sqrt{s}}.$$

On suppose maintenant que tout $x \in \ker A - \{0\}$ est tel que $\|x\|_2 < \|x\|_1 / (2\sqrt{s})$. Soit $h \in \ker A - \{0\}$ et $I \subset \{1, \dots, N\}$ tel que $|I| \leq s$. On veut montrer que $\|P_I h\|_1 < \|h\|_1 / 2$. On a

$$\|P_I h\|_1 \leq \sqrt{|I|} \|P_I h\|_2 < \sqrt{\frac{|I|}{s}} \frac{\|h\|_1}{2} < \frac{\|h\|_1}{2}.$$

On suppose que la "propriété du noyau" d'ordre s est vérifiée. Soit $x \in \Sigma_s$. On prend

$$\Delta_1(Ax) \in \text{argmin}_{t \in \mathbb{C}^N} (\|t\|_1 : At = Ax).$$

On veut montrer que $\Delta_1(Ax) = x$. Pour cela, il suffit de montrer que si $h \in \ker A - \{0\}$ alors $\|x + h\|_1 > \|x\|$. On note $I = \text{supp}(x)$. On a

$$\|x + h\|_1 = \|x + h_I\|_1 + \|h_{I^c}\|_1 > \|x + h_I\|_1 + \|h_I\|_1 \geq \|x\|_1. \square$$

En conclusion, pour montrer qu'une matrice $A : \mathbb{C}^N \mapsto \mathbb{C}^m$ permet la reconstruction exacte de tout vecteur s -sparse x à partir de Ax et grâce à l'algorithme de Basis Pursuit, il suffit de vérifier que A satisfait $RIP(128s, 1/4)$ ou $Gelfand(4s)$. C'est l'objet de la section suivante.

4 Propriété d'isométrie restreinte pour les matrices de Fourier aléatoires

Soit $I \subset \{1, \dots, N\}$ un ensemble de fréquences et Γ_I la matrice extraite de Γ où on a gardé uniquement les lignes de Γ d'indices dans I . La question à laquelle on souhaite répondre dans cette section est la suivante : comment choisir les fréquences de I de telle sorte qu'après renormalisation Γ_I satisfasse $RIP(s, \delta)$ avec $|I|$ de l'ordre de s à des logarithmes près ?

Jusqu'à maintenant la seule manière qui ait été trouvée pour répondre à cette question est de choisir les fréquences de manière aléatoires ! En effet, on se fixe s (cela signifie qu'on connaît le niveau de sparsité des signaux que nous sommes amenés à traiter), on introduit des variables de sélection, qu'on appelle des **sélecteurs** : soit $0 < \delta < 1$ et $\delta_1, \dots, \delta_N$ des variables i.i.d. à valeurs dans $\{0, 1\}$ telles que $\mathbb{P}[\delta_i = 1] = \delta$ (et donc $\mathbb{P}[\delta_i = 0] = 1 - \delta$) pour tout $i = 1, \dots, N$. On définit l'ensemble de fréquence

$$I = \{i \in \{1, \dots, N\} : \delta_i = 1\}. \quad (4.1)$$

Le cardinal moyen de I est δN . Cela va correspondre au nombre moyen de coefficients de Fourier observés. On pose alors $m = \delta N$ comme étant le nombre d'observations du problème. On souhaite avoir m de l'ordre de $s \log^\beta N$ où $\beta \geq 1$ est l'exposant du logarithme. C'est-à-dire, on pense prendre $\delta \sim (s \log^\beta N)/N$.

On commence d'abord par établir une borne inférieure sur δ pour ce problème.

4.1 Borne inférieure pour la sélection aléatoire des fréquences

Les signaux parcimonieux les plus difficiles à reconstruire pour le problème de Compressed Sensing sont ceux qui ont des structures cycliques issus des sous-groupes de $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. On a déjà rencontré ces signaux dans la section 3.1 car ce sont eux aussi qui maximisent le principe d'incertitude discret de Donoho et Stark (voir Théorème 3.4).

On reprend l'exemple de (4.2). On suppose que N n'est pas un nombre premier. On peut donc écrire $N = s\tau$ avec $s, \tau > 1$. On considère le signal s -sparse x et sa transformée de Fourier \hat{x} définis pour tout $p = 1, \dots, N$ par

$$x_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod{\tau} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } \hat{x}_p = \begin{cases} s/\sqrt{N} & \text{si } p \equiv 1 \pmod{s} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Si on observe $(\hat{x}_i : i \in I)$ où $I = \{i \in \{1, \dots, N\} : \delta_i = 1\}$ est l'ensemble des fréquences sélectionnées aléatoirement alors on observera un vecteur nul $(\hat{x}_i : i \in I) = 0$ quand $\delta_1 = \delta_{1+s} = \dots = \delta_{1+(\tau-1)s} = 0$. Cet événement a lieu avec probabilité $(1 - \delta)^\tau$ (si δ est la moyenne des δ_i). Notamment toutes méthodes de reconstruction de x à partir de $\Gamma_I x$ ne marchera pas avec probabilité plus grande que $1/N$ quand $(1 - \delta)^\tau \geq 1/N$. Ce sera en particulier le cas quand $\delta \leq s \log N / (2N)$. Il faut donc prendre des sélecteurs avec une moyenne au moins de l'ordre de $(s \log N)/N$ pour avoir un espoir de reconstruire x à partir de $\Gamma_I x$. Entre autres, on devra observer un nombre moyen de $|I| \sim s \log N$ fréquences pour chaque x .

4.2 Preuve de Rudelson et Vershynin de la propriété d'isométrie restreinte des matrices de Fourier aléatoires

Théorème 4.1 ([38]) *Soit $0 < \delta < 1$ et $\delta_1, \dots, \delta_N$ des sélecteurs i.i.d. de moyenne δ . On considère l'ensemble $I = \{i \in \{1, \dots, N\} : \delta_i = 1\}$ et la matrice de Fourier extraite Γ_I .*

Il existe des constantes c_0 et c_1 pour lesquelles ce qui suit a lieu. Quand $\delta \geq (c_0 s \log^4)/N$, alors avec probabilité au moins $1 - 4 \exp(-c_1 N/s)$, $\Gamma_I/\sqrt{\delta}$ vérifie $RIP(s, 1/2)$.

Preuve : On note $A = \Gamma_I/\sqrt{\delta}$. On veut montrer qu'avec grande probabilité : $\forall x \in \Sigma_s, (1/2) \|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq (3/2) \|x\|_2$. Pour cela il suffit de prouver que

$$\sup_{x \in \mathcal{U}_s} \left| \|Ax\|_2^2 - 1 \right| \leq \frac{1}{4} \text{ c'est-à-dire } \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \left| \sum_{i=1}^N (\delta_i - \delta) |\hat{x}_i|^2 \right| \leq \frac{\delta}{4} \quad (4.3)$$

où on rappelle que $\mathcal{U}_s = \{x \in \mathcal{S}_2^{N-1} : |\text{supp}(x)| \leq s\}$.

On utilise l'inégalité de concentration de Talagrand pour les suprema de processus empiriques pour ramener le problème (4.3) à un problème de contrôle d'espérance. On rappelle que si F est une classe de fonctions mesurables d'un espace \mathcal{X} et à valeurs réelles et que si X_1, \dots, X_N sont des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathcal{X} alors (sous certaine propriété de séparabilité de F), on a pour tout $t > 0$, avec probabilité plus grande que $1 - 4 \exp(-t)$,

$$\sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^N f(X_i) - \mathbb{E}f(X_i) \right| \leq 2\mathbb{E} \sup_{f \in F} \left| \sum_{i=1}^N f(X_i) - \mathbb{E}f(X_i) \right| + K\sigma(F)\sqrt{t} + K\|F\|_\infty t \quad (4.4)$$

où K est une constante universelle positive,

$$\sigma^2(F) = \sup_{f \in F} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}f^2(X_i) \text{ et } \|F\|_\infty = \sup_{f \in F} \max_{1 \leq i \leq N} \|f(X_i)\|_\infty.$$

On applique cette inégalité de concentration à la classe $F = \{|\langle \cdot, x \rangle|^2 : x \in \mathcal{U}_s\}$ et aux variables aléatoires $X_i = \delta_i \Gamma_i, i = 1, \dots, N$ qui sont bien indépendantes. On a

$$\sup_{f \in F} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}f^2(X_i) = \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \sum_{i=1}^N \delta |\hat{x}_i|^4 \leq \delta \|\hat{x}\|_\infty^2 \leq \frac{\delta s}{N}$$

et $\sup_{f \in F} \max_{1 \leq i \leq N} \|f(X_i)\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \|\hat{x}\|_\infty^2 = s/N$. On a alors pour $t = c_0 N/s$ (où c_0 est une constante absolue suffisamment petite telle que $K\sqrt{(\delta st)/N} + K(st/N) \leq 1/8$) : avec probabilité plus grande que $1 - 4 \exp(-c_0 N/s)$,

$$\sup_{x \in \mathcal{U}_s} \left| \sum_{i=1}^N (\delta_i - \delta) |\hat{x}_i|^2 \right| \leq 2\mathbb{E} \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \left| \sum_{i=1}^N (\delta_i - \delta) |\hat{x}_i|^2 \right| + \frac{\delta}{8}. \quad (4.5)$$

Il suffit donc de prouver que

$$E := \mathbb{E} \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \left| \sum_{i=1}^N (\delta_i - \delta) |\hat{x}_i|^2 \right| \leq \frac{\delta}{16}. \quad (4.6)$$

Pour le contrôle de l'espérance E , on commence avec un argument de symétrization et on majore le processus de Rademacher par le processus Gaussien :

$$E \leq 2\mathbb{E}_{\delta_i} \mathbb{E}_{\epsilon_i} \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \left| \sum_{i=1}^N \epsilon_i \delta_i |\hat{x}_i|^2 \right| \stackrel{(\star 1)}{\leq} c_0 \mathbb{E}_{\delta_i} \mathbb{E}_{g_i} \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \left| \sum_{i=1}^N g_i \delta_i |\hat{x}_i|^2 \right|.$$

Conditionnellement à $\delta_1, \dots, \delta_N$, on étudie le processus Gaussien $Z(x) = \sum_{i=1}^N g_i \delta_i |\hat{x}_i|^2$ quand $x \in \mathcal{U}_s$. La métrique associée à ce processus est telle que : pour tout $x, y \in \mathcal{U}_s$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z(x) - Z(y))^2 &= \sum_{i=1}^N \delta_i (|\hat{x}_i|^2 - |\hat{y}_i|^2)^2 = \sum_{i=1}^N \delta_i (|\hat{x}_i| - |\hat{y}_i|)^2 (|\hat{x}_i| + |\hat{y}_i|)^2 \\ &\leq 2 \max_{1 \leq i \leq N} \delta_i (|\hat{x}_i| - |\hat{y}_i|)^2 \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \left(\sum_{i=1}^N \delta_i |\hat{x}_i|^2 \right) = 2d_I(x, y)^2 \text{diam}(P_I \Gamma \mathcal{U}_s, \ell_2^N)^2 \end{aligned}$$

où on note $I = \{i : \delta_i = 1\}$, pour tout $x, y \in \mathbb{C}^N$,

$$d_I(x, y) = \|P_I \Gamma(x - y)\|_\infty \text{ et } \text{diam}(P_I \Gamma \mathcal{U}_s, \ell_2^N) = \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \|P_I \Gamma x\|_2.$$

Par un argument de chaînage classique, on obtient

$$E \leq^{(*)2} c_1 \mathbb{E}_{\delta_i} \text{Dudley}(I) \text{diam}(P_I \Gamma \mathcal{U}_s, \ell_2^N) \leq c_1 (\mathbb{E}_{\delta_i} \text{Dudley}(I)^2)^{1/2} (\mathbb{E}_{\delta_i} \text{diam}(P_I \Gamma \mathcal{U}_s, \ell_2^N)^2)^{1/2} \quad (4.7)$$

où, pour tout $I \subset \{1, \dots, N\}$, on note l'intégrale entropique de Dudley par

$$\text{Dudley}(I) = \int_0^{+\infty} \sqrt{\log N(\mathcal{U}_s, \epsilon, d_I)} d\epsilon.$$

On a

$$\mathbb{E}_{\delta_i} \text{diam}(P_I \Gamma \mathcal{U}_s, \ell_2^N)^2 = \mathbb{E} \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \sum_{i=1}^N \delta_i |\hat{x}_i|^2 = \mathbb{E} \sup_{x \in \mathcal{U}_s} \sum_{i=1}^N (\delta_i - \delta) |\hat{x}_i|^2 + \delta \leq E + \delta.$$

Ce qui donne dans (4.7) :

$$E \leq c_1 (\mathbb{E}_{\delta_i} \text{Dudley}(I)^2)^{1/2} \sqrt{E + \delta}.$$

On obtient alors $E \leq \max(\delta/16, c_2 \mathbb{E}_{\delta_i} \text{Dudley}(I)^2)$. On est donc amené à calculer les entropies intégrales de \mathcal{U}_s pour les différentes métriques d_I . On commence d'abord par un calcul d'entropie.

Lemme 4.2 *Il existe des constantes absolues c_3 et c_4 telle que ce qui suit à lieu. Pour tout $I \subset \{1, \dots, N\}$ et tout $\epsilon > 0$, on a*

$$\log N(\mathcal{U}_s, \epsilon, d_I) \leq c_3 \begin{cases} 0 & \text{si } \epsilon \geq \sqrt{s/N}, \\ \frac{s \log |I| \log N}{N \epsilon^2} & \text{si } \sqrt{\frac{c_4 s \log N}{N |I|}} \leq \epsilon < \sqrt{s/N}, \\ |I| \log \left(\frac{cs}{N \epsilon^2} \right) & \text{si } 0 < \epsilon \leq \sqrt{\frac{c_4 s \log N}{N |I|}}. \end{cases}$$

Preuve : Pour tout $x \in \mathcal{U}_s$, on a $|\hat{x}|_\infty \leq \sqrt{s/N}$ donc $\mathcal{U}_s \subset \sqrt{s/N} \mathcal{B}_I$ où \mathcal{B}_I est la boule unité associée à d_I . Notamment, $\log N(\mathcal{U}_s, \epsilon, d_I) = 0$ quand $\epsilon \geq \sqrt{s/N}$. On a aussi, par un argument volumique : pour tout $\epsilon > 0$,

$$N(\mathcal{U}_s, \epsilon, d_I) \leq N(\sqrt{s/N} \mathcal{B}_I, \epsilon \mathcal{B}_I) \leq \left(\frac{c}{\epsilon} \sqrt{\frac{s}{N}} \right)^{|I|}.$$

Pour le régime intermédiaire, on utilise la méthode empirique de Maurey (voir [36, 37]). Pour simplifier les notations, on donne la preuve dans le cas réel. La preuve est identique pour le cas complexe.

On voit que pour tout $x \in \mathcal{U}_s$, $\|x\|_1 \leq \sqrt{s} \|x\|_2 \leq \sqrt{s}$. On a donc $\mathcal{U}_s \subset \sqrt{s} B_1^N$ et

$$N(\mathcal{U}_s, \epsilon, d_I) \leq N(B_1^N, (\epsilon/\sqrt{s}) \mathcal{B}_I).$$

Soit $x \in B_1^N$. On note $x = \sum_{i=1}^N \lambda_i e_i$ où (e_1, \dots, e_N) est la base canonique de \mathbb{R}^N et $\sum_{i=1}^N |\lambda_i| \leq 1$. On considère la variable aléatoire Z à valeurs dans $\{0, \pm e_1, \dots, \pm e_N\}$ définie par

$$\mathbb{P}[Z = 0] = 1 - \|x\|_1 \text{ et } \mathbb{P}[Z = \text{sign} \lambda_i e_i] = |\lambda_i| \text{ pour } i = 1 \dots, N.$$

De telle sorte que $\mathbb{E}Z = x$. Soit p un entier à déterminer plus tard et Z_1, \dots, Z_p des variables i.i.d. distribuées comme Z . On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{Z_i} d_I \left(x, \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Z_j \right) &= \mathbb{E} \left\| P_I \Gamma \left(\frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Z_j - x \right) \right\|_{\infty} \leq c_0 \mathbb{E}_{Z_i} \mathbb{E}_{g_i} \left\| \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p g_j P_I \Gamma Z_j \right\|_{\infty} \\ &\leq c_0 \mathbb{E}_{Z_i} \mathbb{E}_{g_i} \max_{i \in I} \left| \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p g_j \langle \Gamma_i, Z_j \rangle \right|. \end{aligned}$$

Par une inégalité maximal Gaussienne, on obtient

$$\mathbb{E}_{Z_i} d_I \left(x, \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Z_j \right) \leq c_1 \sqrt{\log |I|} \max_{i \in I} \sqrt{\frac{1}{p^2} \sum_{j=1}^p \langle \Gamma_i, Z_j \rangle^2} \leq c_1 \sqrt{\frac{\log |I|}{pN}}.$$

Si p est tel que $p \geq c_1^2 s \log |I| / (N \epsilon^2)$ alors $\mathbb{E}_{Z_i} d_I \left(x, \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Z_j \right) \leq \epsilon / \sqrt{s}$ donc il va exister $\omega \in \Omega$ tel que $d_I \left(x, \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p Z_j(\omega) \right) \leq \epsilon / \sqrt{s}$. Alors l'ensemble

$$\left\{ \frac{1}{p} \sum_{j=1}^p z_i : z_1, \dots, z_p \in \{0, \pm e_1, \dots, \pm e_N\} \right\}$$

est un ϵ / \sqrt{s} -réseau de B_1^N pour d_I . Cet ensemble est au plus de cardinal $(2N + 1)^p$. \square

Grâce au calcul des nombres d'entropie de Lemme 4.2, on obtient pour tout $I \subset \{1, \dots, N\}$,

$$Dudley(I) \leq c_5 \sqrt{\frac{s}{N}} \left[\sqrt{\log(eN/s)} + \log N + \sqrt{\log |I|} (\log N)^{3/2} \right].$$

On obtient donc

$$\mathbb{E}_{\delta_i} Dudley(I)^2 \leq \frac{c_6 s}{N} \left[\log(eN/s) + \log^2 N + (\log N)^3 \mathbb{E}_{\delta_i} \log |I| \right] \leq c_7 \frac{s \log^4 N}{N}.$$

Donc, si $\delta \geq c_8 \frac{s \log^4 N}{N}$ pour c_8 une constante absolue assez grande, on aura $\mathbb{E}_{\delta_i} Dudley(I)^2 \leq \delta / (16c_2)$ et donc $E \leq \delta / 8$. \square

4.3 Sources potentielles de pertes logarithmiques dans l'argument de Rudelson et Vershynin

Les sources potentielles de pertes logarithmiques dans l'argument précédent sont repérés par des \star . Il y en a principalement deux.

Le repère $(\star 1)$ est placé sur l'inégalité entre processus Gaussien et processus de Rademacher. Cette inégalité peut être source d'une perte logarithmique même si on a pour tout $T \subset \mathbb{C}^N$,

$$\mathbb{E} \sup_{t \in T} \left| \sum_{i=1}^N \epsilon_i t_i \right| \leq c_1 \mathbb{E} \sup_{t \in T} \left| \sum_{i=1}^N g_i t_i \right| \leq c_2 \sqrt{\log N} \mathbb{E} \sup_{t \in T} \left| \sum_{i=1}^N \epsilon_i t_i \right|. \quad (4.8)$$

La précision des inégalités de (4.8) dépend de la "nature" des vecteurs de T . Quand les vecteurs de T sont "bien étalés" (c'est-à-dire une grande majorité des coordonnées sont du même ordre de grandeur) alors il n'y a pas de réelle différence entre les surpema des processus gaussiens et de

Rademacher. Par contre, quand l'ensemble T est fait de vecteurs parcimonieux alors il y a une différence entre ces deux suprema. Par exemple quand $T = \{e_1, \dots, e_N\}$, on a

$$\mathbb{E} \sup_{t \in T} \left| \sum_{i=1}^N \epsilon_i t_i \right| = 1 \text{ et } \mathbb{E} \sup_{t \in T} \left| \sum_{i=1}^N g_i t_i \right| \sim \sqrt{\log N}.$$

De même quand on travaille avec des vecteurs m -sparse, on

$$\mathbb{E} \sup_{t \in \mathcal{U}_m} \left| \sum_{i=1}^N \epsilon_i t_i \right| = \sqrt{m} \text{ et } \mathbb{E} \sup_{t \in \mathcal{U}_m} \left| \sum_{i=1}^N g_i t_i \right| \sim \sqrt{m \log(eN/m)}.$$

Il y a donc une perte logarithmique pour $T = \mathcal{U}_m$ entre les deux suprema quand m n'est pas une proportion de N . C'est le cas pour le problème de la propriété d'isométrie restreinte.

En effet, conditionnellement à $\delta_1, \dots, \delta_N$, on travaille avec l'ensemble

$$P_I \Gamma \mathcal{U}_s = \{(\delta_1 \hat{x}_1, \dots, \delta_N \hat{x}_N)^\perp : x \in \mathcal{U}_s\}$$

qui est un ensemble constitué de vecteurs à support dans I . Comme I est de cardinal moyen $\delta N \ll N$, les vecteurs de $P_I \Gamma \mathcal{U}_s$ sont parcimonieux et donc on peut s'attendre à une source de perte logarithmique au niveau de $(\star 1)$.

La deuxième source potentielle de perte logarithmique est repérée par $(\star 2)$. Ici c'est une perte due à l'argument de chaînage. Il est connu que l'intégrale entropique de Dudley n'est en générale pas optimale pour le contrôle des suprema des processus Gaussien. Pour cela, il y a une autre mesure de complexité qui est appelée le γ_2 de Talagrand.

Définition 4.3 Soit T un ensemble muni d'une semi-métrique d . Une **suite admissible** de T est une suite $(T_s)_s$ de sous-ensembles de T telle que $|T_0| \leq 1$ et $|T_s| \leq 2^{2^s} \forall s \geq 1$. Le γ_2 de (T, d) est défini par

$$\gamma_2(T, d) = \inf_{(T_s)_s} \sup_{t \in T} \sum_{s \geq 0} 2^{s/2} d(\pi_{s+1} t, \pi_s t)$$

où l'infimum est pris sur toutes les suites admissibles de T et pour tout $s \in \mathbb{N}$ et $t \in T$, $\pi_s t$ est un des points de T_s les plus proches de t pour d .

Théorème 4.4 (Théorème de la mesure majorante, [41]) Il existe des constantes absolues $0 < c_0 < c_1$ telles que pour tout $T \subset \mathbb{C}^N$, on a

$$c_0 \gamma_2(T, \ell_2^N) \leq \mathbb{E} \sup_{t \in T} \sum_{i=1}^N g_i t_i \leq c_1 \gamma_2(T, \ell_2^N).$$

Pour contre, il peut y avoir des différences logarithmiques entre l'intégrale de Dudley et la fonction γ_2 . Par exemple, pour la boule B_1^N ,

$$\text{Dudley}(B_1^N, \ell_2^N) \sim (\log N)^{3/2} \text{ et } \gamma_2(B_1^N, \ell_2^N) \sim \sqrt{\log N}.$$

Dans le cas de la condition RIP, on pense être dans un tel cas où il y a une différence entre l'intégrale de Dudley et la fonction γ_2 .

Références

- [1] R. Adamczak, A. E. Litvak, A. Pajor, and N. Tomczak-Jaegermann. Restricted isometry property of matrices with independent columns and neighborly polytopes by random sampling. *Constr. Approx.*, 34(1) :61–88, 2011.
- [2] Radosław Adamczak, Rafał Latała, Alexander E. Litvak, Alain Pajor, and Nicole Tomczak-Jaegermann. Geometry of log-concave ensembles of random matrices and approximate reconstruction. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349(13-14) :783–786, 2011.
- [3] J. Bourgain. Bounded orthogonal systems and the $\Lambda(p)$ -set problem. *Acta Math.*, 162(3-4) :227–245, 1989.
- [4] J. Bourgain. On $\Lambda(p)$ -subsets of squares. *Israel J. Math.*, 67(3) :291–311, 1989.
- [5] Jean Bourgain. Λ_p -sets in analysis : results, problems and related aspects. In *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I*, pages 195–232. North-Holland, Amsterdam, 2001.
- [6] Jean Bourgain, Stephen Dilworth, Kevin Ford, Sergei Konyagin, and Denka Kutzarova. Explicit constructions of RIP matrices and related problems. *Duke Math. J.*, 159(1) :145–185, 2011.
- [7] Emmanuel Candes and Terence Tao. Reflections on compressed sensing. *IEEE Information Theory Society Newsletter*, 2008.
- [8] Emmanuel J. Candès and Justin Romberg. Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions. *Found. Comput. Math.*, 6(2) :227–254, 2006.
- [9] Emmanuel J. Candès and Justin Romberg. Errata for : “Quantitative robust uncertainty principles and optimally sparse decompositions” [Found. Comput. Math. **6** (2006), no. 2, 227–254; mr2228740]. *Found. Comput. Math.*, 7(4) :529–531, 2007.
- [10] Emmanuel J. Candès and Terence Tao. Decoding by linear programming. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 51(12) :4203–4215, 2005.
- [11] Emmanuel J. Candès and Terence Tao. Near-optimal signal recovery from random projections : universal encoding strategies? *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(12) :5406–5425, 2006.
- [12] Djalil Chafaï, Olivier Guédon, Guillaume Lecué, and Alain Pajor. *Interactions between compressed sensing random matrices and high dimensional geometry*. A paraître à la SMF. Collection panoramas et synthèses, 2012.
- [13] David Donoho and Philip Stark. Uncertainty principles and signal recovery. *SIAM J. Appl. Math.*, 1989.
- [14] David L. Donoho. Compressed sensing. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 52(4) :1289–1306, 2006.
- [15] A. Dvoretzky and C. A. Rogers. Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 36 :192–197, 1950.
- [16] Aryeh Dvoretzky. A theorem on convex bodies and applications to Banach spaces. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 45 :223–226 ; erratum, 1554, 1959.
- [17] Aryeh Dvoretzky. Some results on convex bodies and Banach spaces. In *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960)*, pages 123–160. Jerusalem Academic Press, Jerusalem, 1961.
- [18] Gerald B. Folland and Alladi Sitaram. The uncertainty principle : a mathematical survey. *J. Fourier Anal. Appl.*, 3(3) :207–238, 1997.
- [19] Simon Foucart. A simple proof of kashin’s decomposition theorem. 2011.
- [20] A. Yu. Garnaev and E. D. Gluskin. The widths of a Euclidean ball. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 277(5) :1048–1052, 1984.
- [21] Olivier Guédon, Shahar Mendelson, Alain Pajor, and Nicole Tomczak-Jaegermann. Majorizing measures and proportional subsets of bounded orthonormal systems. *Rev. Mat. Iberoam.*, 24(3) :1075–1095, 2008.
- [22] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Convex analysis and minimization algorithms. II*, volume 306 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1993. Advanced theory and bundle methods.
- [23] R. S. Ismagilov. Diameters of sets in normed linear spaces, and the approximation of functions by trigonometric polynomials. *Uspehi Mat. Nauk*, 29(3(177)) :161–178, 1974.
- [24] B. S. Kashin and V. N. Temlyakov. A remark on the problem of compressed sensing. *Mat. Zametki*, 82(6) :829–837, 2007.
- [25] B. S. Kašin. The widths of certain finite-dimensional sets and classes of smooth functions. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 41(2) :334–351, 478, 1977.
- [26] Daniel Li and Hervé Queffélec. *Introduction à l’étude des espaces de Banach*, volume 12 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2004. Analyse et probabilités. [Analysis and probability theory].
- [27] Shahar Mendelson, Alain Pajor, and Nicole Tomczak-Jaegermann. Reconstruction and subgaussian operators in asymptotic geometric analysis. *Geom. Funct. Anal.*, 17(4) :1248–1282, 2007.

- [28] Shahar Mendelson, Alain Pajor, and Nicole Tomczak-Jaegermann. Uniform uncertainty principle for Bernoulli and subgaussian ensembles. *Constr. Approx.*, 28(3) :277–289, 2008.
- [29] V. Milman. Dvoretzky’s theorem—thirty years later. *Geom. Funct. Anal.*, 2(4) :455–479, 1992.
- [30] V. D. Milman. A new proof of A. Dvoretzky’s theorem on cross-sections of convex bodies. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 5(4) :28–37, 1971.
- [31] Vitali Milman and Gideon Schechtman. An “isomorphic” version of Dvoretzky’s theorem. II. In *Convex geometric analysis (Berkeley, CA, 1996)*, volume 34 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 159–164. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [32] Vitali D. Milman and Gideon Schechtman. *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, volume 1200 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. With an appendix by M. Gromov.
- [33] Vitali D. Milman and Gideon Schechtman. An “isomorphic” version of Dvoretzky’s theorem. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 321(5) :541–544, 1995.
- [34] B. K. Natarajan. Sparse approximate solutions to linear systems. *SIAM J. Comput.*, 24(2) :227–234, 1995.
- [35] Gilles Pisier. Martingales with values in uniformly convex spaces. *Israel J. Math.*, 20(3-4) :326–350, 1975.
- [36] Gilles Pisier. Remarques sur un résultat non publié de B. Maurey. In *Seminar on Functional Analysis, 1980–1981*, pages Exp. No. V, 13. École Polytech., Palaiseau, 1981.
- [37] Gilles Pisier. *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, volume 94 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.
- [38] Mark Rudelson and Roman Vershynin. On sparse reconstruction from Fourier and Gaussian measurements. *Comm. Pure Appl. Math.*, 61(8) :1025–1045, 2008.
- [39] Michel Talagrand. Sections of smooth convex bodies via majorizing measures. *Acta Math.*, 175(2) :273–300, 1995.
- [40] Michel Talagrand. Selecting a proportion of characters. *Israel J. Math.*, 108 :173–191, 1998.
- [41] Michel Talagrand. *The generic chaining*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Upper and lower bounds of stochastic processes.
- [42] Terence Tao. An uncertainty principle for cyclic groups of prime order. *Math. Res. Lett.*, 12(1) :121–127, 2005.