2017-2018
1ère année

- Optimisation différentiable - Énoncés des TDs

Enseignant : M. Guillaume Lecué

Assistant
Christophe Gaillac
Bureau **3106**
✉ assistant-math@ensae.fr

Un Grand Merci à Gabriel Romon, Michel Grun-Rehomm, et Yannick Guyonvarch.

Table des matières

Les énoncés indiqués avec une étoile sont a faire en priorité en TD. Les exercices doublement étoilés sont à faire en seconde lecture.
Les deux chapitres "complements" ne seront pas fait en TD, mais constituent un bon entrainement.

1. Compléments de Calcul Différentiel

* Exercice 1

Soit

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} . \end{aligned}$$

1. Montrer que f est $C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.
2. Montrer que f est $C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

* Exercice 2

Soit

$$\begin{aligned} f: \quad & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto \begin{cases} (x^2+y^2)^x & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} . \end{aligned}$$

Montrer que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

* Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x+y, xy)$. Calculer la différentielle de f.

** Exercice 4

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et soit

$$\begin{aligned} f: \quad & M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R}) \\ & X \mapsto X^T X. \end{aligned}$$

Montrer que f es différentiable et calculer la différentielle de f.
On utilisera $\|X\| = \sup_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} |X_{i,j}|$.

Exercice 5

Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \varphi: \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x,y,z) \mapsto \left(f\left(x^2y, z^2x\right), g\left(x^y, zx\right)\right). \end{aligned}$$

Calculer, si elle existe, la différentielle de f.

* Exercice 6

Soit $E = C^0([a,b],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ et

$$\begin{aligned}\varphi : \quad & E \to E \\ & f \mapsto f^3.\end{aligned}$$

Montrer que φ est différentiable.

Exercice 7

Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable avec g'' bornée par $M \geq 0$.
Soit $I : E \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_0^1 (g\circ f)(t)dt$

1. Montrer que I est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que I est $C^1(E)$.
3. Qu'en est-il si g est seulement $C^1(\mathbb{R})$?

Exercice 8

Soient E et F des evn avec F complet. Soit $D \subset E$ un ouvert.
On pose

$$B^2 = \{f : D \to F / \ f\ C^2, f \text{ bornée, } df \text{ bornée, et } d^2f \text{ bornée}\}$$

et

$$\|f\| = \sup_{x\in D}(\|f(x)\| + \|df(x)\| + \|d^2f(x)\|)$$

Montrer que B^2 est un Banach.

Exercice 9

Soit E un $\mathbb{R}$-evn, $D \subset E$ un ouvert et $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$. On suppose $\overline{D}$ compact, f continue, nulle à la frontière de D et f différentiable sur D.
Montrer qu'il existe $a \in D$ tel que $df(a) = 0$.

Exercice 10

Soient $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $f(x,y,z) = (x+\varphi(yz), y+\psi(x/z))$.
Calculer la différentielle de f.

Exercice 11

1. Soient E, F, G, H des $\mathbb{R}$-evn. B est une forme bilinéaire continue de $F\times G$ dans H, $f : E \to F$ et $g : E \to G$.
   On suppose que f et g sont différentiables en $a \in E$. Montrer que $C : E \to H, x \mapsto B(f(x), g(x))$ est différentiable en a.
2. Soit E un espace vectoriel euclidien.

a) Montrer que $\varphi : x \mapsto x/\|x\|^2$ est différentiable sur $E \setminus \{0\}$.
b) Déterminer la différentielle de $\psi : x \mapsto \|x\|^2$.
c) Déterminer et interpréter la différentielle de φ.

Exercice 12

Déterminer toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(On pourra considérer la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $g(u,v) = f(u+v, u-v)$ et calculer $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$.)

Exercice 13

En quels points de $\mathbb{R}^2$ la fonction $g : (x,y) \mapsto \max(x^2, y)$ est-elle différentiable ? Calculer sa différentielle quand elle existe.

Exercice 14

Soient $n \geq 1$ et $p \geq 1$ des entiers.
On définit

$$\begin{array}{rl} f : & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{x^n y^p}{x^2+y^2} & \text{si} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} & (x,y) = (0,0) \end{array} \right. \end{array} .$$

Pour quelles valeurs de (n,p) f est-elle différentiable dans $\mathbb{R}^2$?

* Exercice 15

Soit B dans $M_n(\mathbb{R})$.
Donner la différentielle de $\varphi : GL_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{Tr}(A^{-1}B)$

* Exercice 16

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R}), x \mapsto A(x)$
Calculer la différentielle de $x \mapsto \ln \det A(x)$

Exercice 17

Soient f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 1. Montrer que $\varphi : (x,y) \mapsto f(xy) + g(x/y)$ est différentiable en $(1,1)$ et calculer sa différentielle en ce point.

Exercice 18

Déterminer toutes les fonctions f de classe C^2 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ qui vérifient

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3},$$

où $Z(x, y) = f(y/x)$

Exercice 19

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $f : E \to F$ de classe C^2 telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(tx) = t^2 f(x)$$

Montrer que pour tout $x \in E$, $d^2 f(0)(x, x) = 2f(x)$.

2. Ensembles convexes

Exercice 20

Trouver K un convexe fermé et f une application affine telle que $f(K)$ soit un ouvert.

Exercice 21

Soit C un convexe non réduit à un point.

1. Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :
   a) $x_0 \in \mathrm{Ri}(C)$
   b) $\forall x \in C, \exists y,\ x_0 \in [x, y[$
2. Montrer que si C n'est pas convexe, alors la réciproque est fausse.

Exercice 22

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ convexe de cardinal $n+2$. Montrer qu'il existe une partition de K en $K_1 \cup K_2$ telles que les enveloppes convexes de K_1 et K_2 ne sont pas disjointes.

Exercice 23

Soit K une partie convexe de E et M une variété affine de E telle que $M \cap \mathrm{Ri}(K) \neq \emptyset$. On suppose M fermée.

1. Montrer que $\mathrm{Ri}(M \cap K) = M \cap \mathrm{Ri}(K)$
2. Montrer que $\overline{M \cap K} = M \cap \overline{K}$

* Exercice 24

Montrer que toute section plane d'un ensemble convexe est convexe.

Exercice 25

Donner un exemple de fermé A d'un evn tel que $\mathrm{co}(A)$ ne soit pas fermée.

* Exercice 26

1. Soit X un fermé d'un evn E. Montrer l'équivalence des propositions suivantes
   1. X convexe
   2. $\forall x, y \in X,\ (x+y)/2 \in C$.
2. Donner un contre-exemple si X n'est pas fermé.

Exercice 27

Soient A et B deux parties d'un evn E.
Montrer que $\mathrm{co}(A) + \mathrm{co}(B) = \mathrm{co}(A+B)$.

Exercice 28

On dit qu'un point $x \in A$ est un point exposé de A s'il existe un hyperplan d'appui H à A tel que $H \cap A = \{x\}$.
On note $\exp A$ l'ensemble des points exposés de A.

1. Montrer que si C est convexe, on a $\exp C \subset \operatorname{ext} C$.
2. Donner un exemple de convexe C pour lequel $\exp C \subsetneqq \operatorname{ext} C$.
3. Donner un exemple dans $\mathbb{R}^3$ qui vérifie les inclusions strictes suivantes : $\exp C \subsetneqq \operatorname{ext} C \subsetneqq \overline{\exp C}$

* Exercice 29

Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^n$.

1. Pour $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ on considère $\varphi : C \to \mathbb{R}, x \mapsto 2\langle a, x\rangle$. Montrer que φ admet un maximum sur C atteint en un point x_0.
2. Soit $H_a = \{x \in \mathbb{R}^n |\ \langle a, x\rangle = \langle a, x_0\rangle\}$. Montrer que $H_a \cap C$ est un convexe non vide.

** Exercice 30

Soient H un espace de Hilbert et C une partie convexe fermée non vide de H.

1. On considère $f : H \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = (d(x, C))^2$, où $d(x, C) = \inf\{d(x, y),\ y \in C\}$. Montrer que f est différentiable en tout point et calculer la différentielle de f en un point x de $< H$. (On considérera le projecteur P de meilleure approximation sur C).
2. Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle f, x\rangle$ où $f \in H$ et $A \in \mathcal{L}_c(H, H)$ auto-adjointe. Déterminer le gradient de φ en x.

Exercice 31

Soit C un convexe de $\mathbb{R}^n$. Pour $0 \geq b \geq a$, montrer que

$$aC - bC = (a - b)C + b(C - C)$$

* Exercice 32

Soit C un fermé de $\mathbb{R}^n$ tel que $\forall x, y \in C,\ ]x, y[\cap C \neq \emptyset$.
Montrer que C est convexe.

* Exercice 33

Soit X un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $x \in X$. On dit que $v \in \mathbb{R}^n$ est une direction asymptotique de X en x si

$$\forall a \geq 0,\ x + av \in X$$

On note $K(X, x)$ l'ensemble des directions asymptotiques de X en x.

1. Montrer que $\forall x \in X,\ K(X,x)$ est un cône.
2. Si X est convexe, montrer que $K(X,x)$ est convexe et que si $x, x' \in X$, alors $K(X,x) = K(X,x')$.

Exercice 34

Soir X le sous ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$X = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ x_1 \geq 0 \ (1 \leq i \leq 3) \text{ et } \sum_{i=1}^{3} x_i = 1 \right\}.$$

Soit $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ un point de X tel que $f_i > 0$ pour $1 \leq i \leq 3$ et soit a un nombre strictement positif. ON considère

$$A = \left\{ x \in X,\ \sum_{i=1}^{3} \frac{(x_i - f_i)^2}{x_i} \leq a \right\}$$

$$B = \left\{ x \in X,\ \sum_{i=1}^{3} \frac{(x_i - f_i)^2}{f_i} \leq a \right\}$$

Montrer que A et B sont convexes

* Exercice 35

Soit X un convexe de $\mathbb{R}^n$ et A un convexe de $\mathbb{R}^+$ qui contient 0.

1. Montrer que $\bigcup_{a \in A} aX$ est convexe.
2. Que se passe-t-il si $A = [-1, 1]$?

Exercice 36

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}^n$ à N éléments $(N > n+1)$. Montrer qu'il est possible de partitionner X en deux parties X_1 et X_2 tels que

   $$\text{co}(X_1) \cap \text{co}(X_2) \neq \emptyset$$

   (Indication : on montrera qu'il existe une combinaison linéaire des points de X donnant le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ telle que la somme des coefficients soit nulle).
2. Soit $(X_i)_{i \in [\![1,N]\!]}$ N parties convexes fermées de $\mathbb{R}^n$ avec $N > n$.
   Montrer par récurrence sur N le théorème de Helly : si toute sous-famille de (X_i) à $n+1$ éléments a une intersection non vide, alors les N convexes de la famille (X_i) sont d'intersection non vide.
   On raisonnera par l'absurde et on supposera que la propriété est vraie

pour $N-1>n$ et n'est pas vraie pour N.
On utilisera judicieusmeent le résultat de l'exercice précédent en choisissant N points x_i tels que x_i appartienne à tous les convexes de la famille sauf à X_i.

* Exercice 37

Montrer que l'ensemble suivant est convexe :

$$C = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 |\ a > 0,\ b^2 - 4ac < 0\}$$

3. Fonctions convexes

Exercice 38

Soient E un evn et $f : E \to \mathbb{R}$ convexe et impaire.

1. Montrer que $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$.
2. En déduire que $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
3. En déduire que f est linéaire.

Exercice 39

Soit $f > 0$ positivement homogène sur C convexe. Montrer que f est convexe si et seulement si $B = \{x \in C |\ f(x) \leq 1\}$ est convexe.

Exercice 40

Soient $x_i > 0$, $\alpha_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$$

** Exercice 41

Soit I un intervalle contenu dans $\mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable.
Montrer que si $g : x \mapsto f(1/x)$ est convexe dans I, alors $h : x \mapsto xf(x)$ est aussi convexe et réciproquement.

* Exercice 42

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée.
On définit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(t) = \inf_{x \in [a,b]}(-xt - f(x))$
Montrer que φ est concave.

Exercice 43

Soient $t \in [a,b]$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times [a,b] \to \mathbb{R}, (x,t) \to f(x,t)$ telle que f est convexe en x et continue en t.
Montrer que $g : x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est convexe.

Exercice 44

Soit A une partie fermée non vide d'un evn E.
Montrer que A est convexe si et seulement si $x \mapsto d(A,x)$ est convexe de E dans $\mathbb{R}$.

* Exercice 45

Soit $f_n :]0,1[\to \mathbb{R}$ une suite de fonctions convexes qui converge simplement vers $f :]0,1[\to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est convexe.
2. Montrer que f_n converge vers f uniformément sur tout compact de $]0,1[$.

* Exercice 46

Soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions convexes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, convexe et croissante en chaque variable.
Montrer que $F : x \mapsto g(f_1(x), \ldots, f_n(x))$ est convexe sur $[a,b]$.

Exercice 47

Soit $n \geq 1$ et $f : (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n}$$

Montrer que f est concave.

Exercice 48

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto x^2 + y^2 + xy$.

1. Montrer que f est convexe.
2. On pose $x = r\cos(\alpha)$ et $y = r\sin(\alpha)$.
   Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$

* Exercice 49

Pour $x > 0$ et $y > 1$ on pose $F(x,y) = x^\alpha (\ln y)^\beta$ où α et β sont deux paramètres donnés.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de F.
2. Montrer que si F est concave alors $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \geq 0$.

3. Montrer que si $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \geq 0$ alors F est concave sur l'ensemble

$$C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0 \text{ et } \ln y > \frac{\beta}{1-\alpha} - 1\right\}$$

4. Plus généralement, pour I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$, $f \in C^2(I,\mathbb{R})$ et $g \in C^2(J,\mathbb{R})$ on considère

$$F : I \times J \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x)g(y)$$

   a) Montrer que si F est concave avec $f > 0$ et $g > 0$ alors f et g sont concaves.
   b) Montrer que si $f > 0$, $g > 0$ avec f^2 et g^2 concaves, alors F est concave.

* Exercice 50

Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$.

1. φ étant à support compact, montrer que $F : x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\varphi(t)dt$ est convexe.
2. On suppose $f > 0$ croissante et C^1 sur $[a,b]$.
   Montrer que l'on peut prolonger f à $]-\infty, b]$ de manière à ce que la fonction prolongée soit encore convexe, croissante, strictement positive, C^1, et constante sur un intervalle de la forme $]-\infty, \alpha]$.
3. Soient f, g convexes, strictement positives, croissantes et $\mathbb{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que fg est convexe sur $[a,b]$.

Exercice 51

Soit K un convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ et P la projection sur K.
Montrer que $\varphi : x \mapsto \|x - P(x)\|$ est convexe.

Exercice 52

Soient $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définies par $f(x,y) = x^\alpha + y^\beta$ et $g(x,y) = x^\alpha y^\beta$
Etudier la concavité et la convexité de f et g.

Exercice 53

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P est convexe sur $\mathbb{R}$. Montrer que P admet au plus deux racines réelles.

Exercice 54

Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, (x,y) \to \sqrt{xy}$

1. Montrer que f est quasi-concave sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$
2. Montrer que f est strictement quasi-concave.
3. Montrer que f est concave.

Exercice 55

Etudier la concavité et la quasi-concavité (stricte ou non) des fonctions suivantes sur $\mathbb{R}^n$

1. $f(x) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ où $\alpha_i > 0$
2. $f(x) = \min(x_i/\alpha_i)$ où $\alpha_i > 0$

Exercice 56

Soient C un convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : C \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est concave si et seulement si
$$K := \{(x,z) \in C \times \mathbb{R},\ z < f(x)\}$$
est convexe dans $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. On suppose f concave et x_0 un point intérieur à C. Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{L}_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ tel que pour tout $x \in C$,
$$f(x) - f(x_0) \leq L(x - x_0)$$

Exercice 57

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq a$. Montrer que f est constante.

Exercice 58

Soit f définie sur $(\mathbb{R}_+)^n$ par
$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}$$
A quelle condition f est-elle convexe, concave ?

* Exercice 59

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On définit $f : \mathbb{R}^n \to R, x \mapsto \|Ax\|^2 + 2\|Bx\|^{3/2}$. Montrer que f est convexe.

Exercice 60

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, Ax \rangle$. Montrer que si f est quasi-convexe, alors f est convexe.

Exercice 61

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, convexe, continue, strictement monotone sur $[a,b]$.
Que de la convexité/concavité de f^{-1} ?

4. Compléments

Exercice 62

Soient E, F evn réels, A convexe de $E \times F$ et $f : A \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que si $g(x) = \inf_y \{f(x,y),\ (x,y) \in A\}$ est fini, alors g est convexe sur $\mathrm{Proj}_E A$.

Exercice 63

Soient H un espace de Hilbert et $f : H \to]-\infty, \infty]$ convexes. On rappelle que f est s.c.i si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f^{-1}(]-\infty, \lambda])$$

est un fermé de H.

1. Monter que f est s.c.i si et seulement si epig(f) est fermé.
2. Montrer que f est s.c.i si et seulement si $f = \sup_{g \in \overline{A}} g$, où $A = \{g;\ H \to \mathbb{R}\text{affine minorant} f\}$.
3. Soit $f^* :\ H^* \to]-\infty, \infty]$ (f^* : conjuguée de f), définie par
$$f^*(y) = \sup_{x \in H} (< y, x > -f(x)).$$
4. Montrer que
   a) f convexe, s.c.i ;
   b) $< x, y > \leq f(x) + f^*(x),\ \forall x \in H, \forall y \in H^*$;
   c) $f^{**}(x) \leq f(x)$.
5. Si f est identiquement égale à $+\infty$, montrer que f s.c.i si et seulement si $f = f^**$.
6. Calculer la conjuquée f^* de f, où $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que
$$f(t) = \frac{|t|^\alpha}{\alpha},\ \alpha > 1.$$

Exercice 64

Soit $f :\ H \to]-\infty, \infty]$, où H espace de Hilbert. On note

$$\partial f(x_0) = \{y \in H^*, \forall x \in H,\ f(x_0) - f(x) \leq < y, x_0 - x >\}.$$

1. Calculer $\partial f(x)$ si $f : H \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \|x\|$.
2. Montrer que :
   a) $\partial(\lambda f) = \lambda \partial f$ si $\lambda > 0$.
   b) $\partial f + \partial g \subset \partial(f + g)$

Exercice 65

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. on suppose que f est continue en x_0. Montrer que $df(x_0)(h) = \max(mh,\ m \in \partial f(x_0))$.

Exercice 66

Soit H un espace de Hilbert. Montrer que $dim(H) < \infty$ si et seulement si la boule unité de H est compacte.

Exercice 67

Soit $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq x^2 \text{et } x \geq y^2\}$.

1. Determiner le cône tangent et le cône normal à X en $(0, 0)$.
2. Montrer que l'origine est un point qualifié de X.
3. Le point A(1,1) est il un point qualifié de X ?

Exercice 68

Soient H un estpace de Hilbert (réel) et K un convexe fermé de H.

1. Montrer que pour tout f dans H, il existe un unique u dans K tel que :
$$\|f - u\| = \inf_{g \in K} \|f - g\|.$$
2. Montrer que u est l'unique élément de K qui vérifie
$$< u - f, g - u > \geq 0, \forall g \in K.$$
3. Montrer que si K est un cône convexe fermé de sommet 0, u est l'unique élément de K qui vérifie (i) $< u - f, g > \geq 0\ \forall g \in K$, (ii) $< u - f, u >= 0$.
4. Caractériser u dans le cas où K est un sev fermé de H.
5. On appele P_K (projection sur K) l'application $f \to u$. Vérifier que P_K est linéaire, continue, et de norme 1.

5. Optimisation sans contraintes

* Exercice 69

Etudier les extrema locaux de $f : x \mapsto x^2 + \lambda x + \mu$ sur $[a, b]$

* Exercice 70

Quels sont les extrema locaux de $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$?

* Exercice 71

Quels sont les extrema $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$?

Exercice 72

Quels sont les extrema $f : (x, y) \mapsto x(y^2 + \ln^2(x))$?

* Exercice 73

Etudier les extrema des fonctions suivantes :

1. $f : (x, y) \mapsto x \sin(y) + \cos(x)$
2. l'énoncé manuscrit n'est pas clair
3. $h : (x, y) \mapsto x(\ln^2(x) + y^2)$
4. $\varphi : (x, y, z) \mapsto \dfrac{x^2}{2} + xyz + y + z$

Exercice 74

Trouver la plus petite distance entre $(0, 1)$ et la parabole d'équation $x^2 = 2y$.

* Exercice 75

Soit $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ les valeurs propres d'une matrice symétrique A. Déterminer $\max_{\|x\|=1} x^T Ax$ et $\min_{\|x\|=1} x^T Ax$.

* Exercice 76

Soit $L : \mathbb{R}^n \times R \to \mathbb{R}_+, (x_1, \ldots, x_n, \theta) \to L(x_1, \ldots, x_n, \theta)$. On suppose L de classe C^2 par rapport à θ. On cherche $\hat{\theta}$ tel que $L(x_1, \ldots, x_n, \hat{\theta}) = \max_\theta L(x_1, \ldots, x_n, \theta)$.

1. Montrer que $\hat{\theta}$ est solution du système

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \log L}{\partial \theta^2} < 0$$

2. Déterminer $\hat{\theta}$ dans les cas suivants :

a) (Loi binomiale) $L(x,\theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ où $x \in [\![0,n]\!]$.
b) (Loi de Poisson)

$$L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i}\frac{e^{-n\theta}}{\prod_{i=1}^n x_i!},$$

où $x_i \in \mathbb{N}$.
c) (Loi normale, m connu)

$$L(x_1,\ldots,x_n,\theta) = \frac{1}{\theta^n}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\exp\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{2\theta^2}\right),$$

où $m \in \mathbb{R}$.

* Exercice 77

Soit $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}_+^*, (x,\theta) \mapsto L(x,\theta)$ C^2 par rapport à θ.
On cherche $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^p$ tel que $L(x,\hat{\theta}) \geq L(x,\theta)$ $\forall\theta \in \mathbb{R}^p$.

1. Montrer que $\hat{\theta}$ est solution du système

$$\frac{\partial \log L}{\partial \theta_i} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \log L}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \text{ est définie négative}$$

2. Posons $\theta = (m,\sigma^2)$ et

$$L(x,m,\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sigma^2}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Déterminer $\hat{\theta}$.

* Exercice 78

Soient $y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $\beta \in M_{p,1}(\mathbb{R})$ et $X \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. On suppose X^TX inversible.
Résoudre $\min_\beta (y-X\beta)^T(y-X\beta)$.

Exercice 79

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, $S(\theta)$ une matrice symétrique définie positive d'ordre n et $u \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose

$$f(\theta) = -\log(\det S(\theta)) - u^\top S(\theta)^{-1}u.$$

Calculer $\dfrac{df}{d\theta}$ et $\dfrac{d^2f}{d\theta^2}$.

Exercice 80

Pour $y \in \mathbb{R}$, étudier $f : x \mapsto \dfrac{e^{y-x}}{(1+e^{y-x})^2}$.

Exercice 81

Soient $x_1, \dots, x_n$ des réels. Résoudre $\max_\theta e^{-\sum_{i=1}^n x_i} \mathbb{1}_{\theta \leq \inf_i x_i}$
Il s'agit du maximum de vraisemblance de la loi normale multivariée. Le calcul est classique mais difficile à mener sans les outils adéquats. On trouvera les détails dans Magnus, *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics* au Chapitre 15.

Exercice 82

Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{q}\|y\|_2^q = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\langle x, y \rangle - \frac{1}{p}\|x\|_2^p \right)$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}^n$. Discuter selon que $\langle a, y \rangle$ est ≥ 0 ou ≤ 0 de la solution du problème

$$\max_{\langle a, x \rangle \leq 0} \left(\langle x, y \rangle - \frac{1}{p}\|x\|_2^p \right)$$

* Exercice 83

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe.

1. Montrer que si f est majorée sur $\mathbb{R}^n$, alors f est constante.
2. Montrer qu'une fonction f définie sur K un compact convexe de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, convexe sur K, atteint son maximum en un point extrême de K.

6. Optimisation sous contraintes

* Exercice 84

Résoudre

1. $\max\left\{x+y \quad \text{s.c.} \quad y \leq 0,\ y \geq x^3\right\}$
2. $\max\left\{x+2yx+2y-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2} \quad \text{s.c.} \quad x \geq 0,\ y \geq 0,\ x+y \leq 1\right\}$
3. $\min\left\{x^3+y^2 \quad \text{s.c.} \quad x^2+y^2 \leq \left(\frac{5}{4}\right)^2,\ 2x+y+\frac{5}{4} \geq 0\right\}$
4. $\min\left\{x \quad \text{s.c.} \quad x \leq 0,\ y \geq 0,\ y \leq (1+x)^3\right\}$
5. $\max\left\{xy-x^2-y^2 \quad \text{s.c.} \quad 2x+y \geq 5,\ y \geq 3\right\}$

* Exercice 85

Soient $\alpha \in]0,1[$, $\beta \in]0,1[$, $p>0$, $q>0$ et $w>0$.
Résoudre $\max\left\{x^\alpha y^\beta \quad \text{s.c.} \quad px+qy=w\right\}$

* Exercice 86

On considère $\max\left\{xy \quad \text{s.c.} \quad 2x^2+y \leq 4,\ x+y^2 \leq 5,\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$
Représenter le domaine des contraintes et montrer qu'il existe une solution de KKT et que cette solution est encore parmi celles qu'on obtient en supprimant les conditions $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

* Exercice 87

Résoudre $\max xy \quad \text{s.c.} \quad x+2y \leq 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x \leq x_0$ en discutant selon x_0.

Exercice 88

Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $p>0$. Déterminer

$$\min e^{\|x\|^2} + \langle a, x\rangle \quad \text{s.c.} \quad \|x\| \leq p$$

Exercice 89

Soient $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ telle que $< Ax, y > = < x, Ay > \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
Résoudre $\max\{< Ax, x > \ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| = 1\}$.
(On montrera que la valeur du problème de maximisation est égale à la plus grande valeur de A et que toute solution est un vecteur propre unitaire conrrespondant à cette valeur propre).

Exercice 90

Résoudre

1. Extr $\left\{x^2 + y^2 \quad \text{s.c.} \quad 3x^2 + 4xy + 6y^2 = 140\right\}$
2. max $\left\{x^2 + xy + y^2 + yz + z^2 \quad \text{s.c.} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$
3. max $\left\{xy^2z^3 \quad \text{s.c.} \quad x + y + z = 6,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\right\}$

Exercice 91

Déterminer $\max\limits_{g\in E} \int_{-1}^{1} x^3 g(x)dx$ où

$$E = \left\{g \in L^2([-1,1]),\ \int_{-1}^{1} g^2(x)dx = 1,\ \int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} xg(x)dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x)dx = 0\right\}$$

Exercice 92

1. Résoudre
$$\max\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i,\ x_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\right\}.$$
2. Calculer la matrice hessienne du problème précédent.

Exercice 93

Soient $X \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, de rang p $(p \leq n)$ et $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Résoudre

$$\min_A \left\{TrA^2,\ \text{A symétrique positive}, X^T AX = 0,\ TrA = 1\right\}.$$

* Exercice 94

Soit $U : \mathbb{R}_+. \to \mathbb{R}$. $\forall p \in \mathbb{R}_+^n$, $\forall R > 0$, $\forall u_0 \in \text{Im}(U)$, on définit, lorsqu'ils existent :

1. $V(p,R) = \max\left\{U(x),\ < p,x > \leq R \text{ et } x \geq 0\right\}$ et $X(p,R)$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}_+^n$.
2. $C(p,u_0) = \min\left\{< p,x >,\ U(x) \geq u_0 \text{ et } x \geq 0\right\}$ et $h(p,u_0)$ l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}_+^n$.
3. Montrer que si U est continue, V, X, c, h existent et que
$$\forall x \in h(p,u_0),\ u(x) = u_0.$$
Dans la suite on suppose U continue.
4. Si U est quasi-concave, montrer que X et h sont des ensembles convexes.
5. Si U est strictement quasi-concave, montrer que X et h sont réduits à un point.
6. Montrer que :

a) V est décroissante en chaque p_i et croissante en R.
b) C est croissante en p et en u_0

7. Montrer que V est quasi-convexe en p et C concave en p
8. Montrer que si U est concave, alors V est concave en R.

* Exercice 95

On considère une fonction de producion CES (à élasticité de substitution constante) :

$$Q = F(K, N) = \left(\alpha K^{(\sigma-1)/\sigma} + \beta N^{(\sigma-1)/\sigma}\right)^{\nu\sigma/(\sigma-1)},$$

où α, β, ν sont des paramètres qui mesurent respectivement la contribution du capital (K), du travail (N) au produit et des rendements d'échelle.
On note C le coût d'usage du capital et W le taux de salaire nominal.
L'entreprise cherche à minimiser son coût de production (égal à $CK + WN$) tout en assurant un certain niveau de production Q. Ce qui revient à résoudre le problème

$$\min \{CK + WN,\ Q \leq F(K, N)\}.$$

* Exercice 96

Soient E un evn réel et $f_1, \ldots, f_n : E \to \mathbb{R}$ convexes. Montrer que $g(x) = \inf \{\max(f_1(x_1), \ldots, f_n(x_n))\ , \sum_{i=1}^n x_i = x\}$ est convexe.

7. Mise en œuvre numérique

* Exercice 97

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I. On suppose qu'elle a un zéro en $\alpha \in I$ tel que $f'(\alpha) \neq 0$. On fait maintenant une étude théorique plus poussée de la suite définie par la méthode de Newton

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Le choix de x_0 sera fait ultérieurement.

1. Démontrez qu'il existe un segment $J = [a, b]$ contenant α et tel que f' ne s'annule pas sur J.

   Un segment J comme ci-dessus étant choisi, on introduit les quantités $i := \inf_{x\in J}|f'|$ et $s := \sup_{x\in J}|f^{(2)}|$

2. Justifiez que i et s sont bien définis et que $i > 0$.
3. Soit $c = c(J) = \frac{sr}{2i}$, où r est la demi-longueur de J. On admet que

   $$|x_{n+1} - \alpha| \leq \frac{c}{r}|x_n - \alpha|^2$$

   Montrez par récurrence que pour tout $n \geq 0$

   $$|x_n - \alpha| \leq \frac{|x_0 - \alpha|}{c}c^{2^n} \tag{1}$$

   et que $x_n \in J$ avec x_0 l'extrémité de J la plus proche de α. Quelle restriction avez-vous sur c pour obtenir une borne informative sur la vitesse de convergence de l'algorithme ?
4. Montrez que en prenant $J = [1, 2]$, on a bien $c < 1$ quand on applique l'algorithme de Newton à $f(x) = x^2 - 2$. Trouvez x_0 et établissez (1) dans cet exemple.
5. Montrez que $f(x) = ln(x) - x$ admet un unique zéro α. Trouvez J, $c < 1$ et x_0 tels qu'on puisse établir (1) pour cet exemple. Combien de décimales exactes de α obtient-on au minimum à l'itération 2 de l'agorithme de Newton ? Combien d'itérations faut-il pour obtenir 10 décimales exactes ? (Utilisez une calculatrice pour les deux derniers points de la question)

8. Guide pratique d'optimisation

Je vous fournis ici une méthode générale de résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes différentiable qui se base sur le polycopié de cours Pierre Cardaliaguet. Cette méthode n'est bien sûr pas optimale dans tous les cas particuliers. Elle se résume essentiellement à deux grandes étapes : montrer l'existence d'une solution au problème et trouver des points candidats à être des minimiseurs à l'aide des conditions nécessaires d'optimalité de KKT.

Première étape : réécrire le problème sous forme canonique
Tout problème d'optimisation sous contraintes doit d'abord être réécrit sous la forme suivante

$$\inf_{x \in K} f(x) \tag{2}$$

avec

$f : U \to \mathbb{R},\ U$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$

$K := \{x \in U : g_i(x) = 0, \quad i \in \{1, ..., m\}, \quad h_j(x) \leq 0, \quad j \in \{1, ..., q\}\}$

(2) est appelé problème primal.

Ainsi, si le problème initial est un problème de maximisation, vous étudier $\inf -f$ au lieu de $\sup f$. De même, si les contraintes sont du type $g_i(x) = a$ ou $h_j(x) \geq b$, vous les réécrivez pour qu'elles soient de la forme donnée en 2.

Nous avons un objectif f, m contraintes d'égalité et q contraintes d'inégalité. Toutes ces fonctions sont supposées différentiables ici.

Deuxième étape : montrer l'existence d'un minimum au problème
Les différentes versions de KKT reposent toutes sur l'hypothèse que le minimum du problème existe. Autrement dit, elles fournissent des conditions nécessaires pour trouver un point où le minimum est atteint, à condition d'avoir montrer au préalable que le minimum existe. C'est donc une étape fondamentale qui ne doit pas être oubliée. Comme nous nous plaçons dans le cadre de fonctions différentiables donc continues, les contraintes d'égalité et d'inégalité large forment un ensemble de contraintes fermé (à vous de retrouver pourquoi !!). Il y a donc essentiellement deux méthodes pour montrer l'existence d'un minimum :

- montrer que l'ensemble de contraintes est compact
- montrer que la fonction à minimiser est coercive, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$

Troisième étape : trouver les points où l'ensemble des contraintes est dit "non-qualifié"
K est dit non qualifié en $x^* \in K$ s'il existe $(\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q_+$ tels que

$$(\mu, \lambda) \neq 0, \quad \sum_{j=1}^{q} \lambda_j h_j(x^*) = 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla_x g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla_x h_j(x^*) = 0$$

$(\mu, \lambda) \neq 0$ signifie qu'il existe au moins une des composantes du vecteur μ ou λ qui est non-nulle.

Vous devez donc chercher tous les points qui vérifient cet ensemble de contraintes. Les conditions de KKT que nous allons utiliser dans l'étape suivante sont des conditions nécessaires d'optimalité pour des points appartenant à K et où les contraintes sont qualifiées. Ainsi il faut garder de côté les points dans K où les contraintes ne sont pas qualifiées car le minimum peut être atteint en ces points.

Dans l'exercice 8.1 où il n'y a que des contraintes d'inégalité, la définition d'un point x^* de K où les contraintes ne sont pas qualifiées est la suivante :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}_+^q : \quad \lambda \neq 0 \sum_{j=1}^{q} \lambda_j h_j(x^*) = 0, \quad \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla_x h_j(x^*) = 0$$

$\lambda \neq 0$ signifie qu'il existe au moins une des composantes du vecteur λ qui est non-nulle.

Si la contrainte h_j n'est pas active en x^*, on a $h_j(x^*) < 0$. On voit donc que si aucune contrainte n'est active en x^*, $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j h_j(x^*) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^q$ et $\lambda \neq$ sont incompatibles. Ainsi dans le cas où vous n'avez que des contraintes d'inégalité, vous devez seulement chercher tous les points $x^* \in K$ tels qu'au moins une contrainte est active et qui vérifient $\sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla_x h_j(x^*) = 0$.

Quatrième étape : trouver les points où les contraintes sont qualifiées et qui vérifient les conditions nécessaires d'optimalité de KKT pour des points qualifiés

On est presque au bout du chemin ! Il vous faut maintenant identifier tous les points qualifiés $x^* \in K$ qui vérifient les conditions suivantes

$$\begin{aligned}
&\exists (\mu, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+^q \text{ tels que} \\
&\lambda_j h_j(x^*) = 0 \quad \forall j \in \{1, ..., q\} \\
&\nabla_x f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i \nabla_x g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla_x h_j(x^*) = 0
\end{aligned}$$

Pour ne pas vous perdre, il est utile de faire une disjonction de cas selon que $\lambda_j = 0$ ou $\lambda_j > 0$ et ce pour tout $j \in \{1, ..., q\}$.

Cinquième étape : conclusion en comparant la valeur de f aux différents points candidats

Vous devez maintenant comparer tous les points candidats obtenus en troisième et quatrième étapes et évaluer la fonction à minimiser en ces points. Le ou les points où ff prend une valeur minimale sont les points où f atteint son minimum global sous la contrainte $x \in K$.

Cas particuliers

Lorsque les fonctions $\{g_i\}_i$ et $\{h_j\}_j$ sont affines et K est non vide, alors K est qualifié en tout point et l'étape 3 est inutile.

Lorsque les fonctions $\{g_i\}_i$ sont convexes et $\{h_j\}_j$ sont affines et K est d'intérieur non vide, alors K est qualifié en tout point et l'étape 3 est inutile.

Si en plus f est convexe, le programme à résoudre est dit convexe, et alors tout point $x^* \in K$ vérifiant KKT est minimum du problème. Autrement dit, pour un programme convexe, KKT est une condition nécessaire et suffisante d'existence et de caractérisation d'un minimum.

Dans le cas des problèmes convexes différentiables, on peut également trouver une solution au problème par une méthode un peu différente de celle présentée jusqu'à présent. Soit le Lagrangien du problème $\mathcal{L}(.,.,.)$

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j h_j(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j g_j(x)$$

Rappelons que U est l'ouvert sur lequel la fonction objectif est définie. Nous pouvons définir le problème dual associé au problème primal (2)

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}_+^q\times\mathbb{R}^m} \Psi(\lambda, \mu)$$

où $\Psi(\lambda, \mu) = \inf_{x\in U} \mathcal{L}(x, \lambda, \mu)$ est appelée la fonction duale.

En gros, le problème dual revient à

1. minimiser le Lagrangien en x sans contrainte. Ceci permet d'exprimer x comme une fonction de (λ, μ)
2. remplacer x dans le Lagrangien par son expression en fonction de (λ, μ). On obtient alors une fonction uniquement de (λ, μ) que l'on maximise sur ces paramètres.

Pour les problèmes d'optimisation convexe différentiable avec un ensemble de contraintes non vide, on a la propriété suivante : **soit** $(\lambda^*, \mu^*) \in \operatorname{argmax} \Psi(\lambda, \mu)$**, alors tout vecteur** x^* **tel que** (x^*, λ^*, μ^*) **satisfait les conditions de KKT est solution du problème primal.**